Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

Operatori covarianti, operatori tensoriali irriducibili e teorema di Wigner-Eckart

Relatore:

Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:

Tommaso Franzini

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

Lo scopo di questo lavoro è quello di approfondire e formalizzare il concetto di *rotazione* ricavando il suo profondo legame con il momento angolare.

Nella prima parte verrà descritta l'evoluzione del concetto di momento angolare a partire dagli inizi del '900 fino ad arrivare alla teoria di Dirac; in seguito verrà posta particolare attenzione a tre tipologie di operatori: gli operatori scalari, vettoriali e diadici simmetrici a traccia nulla, di cui verranno descritte le diverse proprietà sotto rotazione e le possibili operazioni con cui combinarli.

Nel secondo capitolo si passa a definire il concetto di operatore tensoriale irriducibile: verranno esposte le diverse caratteristiche e verrà dimostrato come è possibile creare una relazione biunivoca tra i tre operatori covarianti per rotazione e particolari operatori tensoriali.

Questa generalizzazione al caso tensoriale è di particolare importanza per la meccanica quantistica e ne verranno presentati due risultati fondamentali: il teorema di Wigner-Eckart e il teorema della proiezione, con relative applicazioni.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Nel 1913 N. Bohr formulò una nuova teoria atomica, per cercare di spiegare la struttura discreta degli spettri atomici, correggendo la precedente teoria di E. Rutherford. Per fare ciò, prendendo spunto dall'idea di quantizzazione utilizzata da M. Planck nel suo lavoro sullo spettro di emissione di corpo nero, ipotizzò che le sole orbite permesse in un atomo fossero quelle che avessero un momento angolare dato da un multiplo intero della costante di Planck $\hbar$

$$l_n = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{1.1}$$

A partire da questo momento il concetto di momento angolare subirà una serie di modifiche nel corso degli anni, fino ad arrivare alla sua formulazione più moderna con l'avvento della teoria di Dirac.

Nove anni dopo, nel 1922, i due fisici O. Stern e W. Gerlach dimostrarono sperimentalmente l'idea di Bohr: facendo passare un fascio di atomi all'interno di un intenso campo magnetico non uniforme, osservarono che esso veniva deviato solo per alcuni angoli, dimostrazione del fatto che la quantizzazione del momento angolare era reale. Però, pur dimostrando l'ipotesi, i risultati ottenuti non erano del tutto in accordo con la teoria, infatti, ripetendo l'esperimento utilizzando atomi di idrogeno allo stato fondamentale per cui non ci si aspettava di osservare deviazione, ciò che venne rilevato furono comunque due fasci separati.

a b c

Figura 1.1: Tre possibili risulati dell'esperimento di Stern-Gerlach: (a) il risultato senza l'azione del campo magnetico, (b) il risultato con campo magnetico predetto dalla teoria classica, in cui gli atomi si distribuiscono in modo omogeneo tra due angoli, infine (c) il risultato osservato, (parzialmente) in accordo con la teoria dell'epoca: il fascio subisce deflessioni solo per alcuni angoli.

Per poter spiegare questi risultati fu necessario introdurre una nuova grandezza non presente nella fisica calssica: lo *spin*; per questo motivo il momento angolare totale di una particella è esprimibile come

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s} \tag{1.2}$$

dove $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{s}$ sono rispettivamente il momento angolare orbitale e di spin.

Secondo la teoria di Dirac della meccanica quantistica, ogni grandezza fisica misurabile è descritta da un operatore lineare autoaggiunto, definito su uno spazio di Hilbert i cui elementi sono descritti da ket $|\psi\rangle$, a meno di un fattore di fase. In meccanica classica il momento angolare orbitale è definito come

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{1.3}$$

per cui, utilizzando il principio di corrispondenza posso esprimere l'operatore associato come

$$\widehat{\boldsymbol{l}} = \widehat{\boldsymbol{q}} \times \widehat{\boldsymbol{p}} \tag{1.4}$$

dove $\widehat{\boldsymbol{q}}$ e $\widehat{\boldsymbol{p}}$ sono risprettivamente l'operatore posizione e impulso.

Per quanto riguarda lo spin, è noto dalla teoria che, essendo un'osservabile, deve esistere un operatore ad esso associato $\widehat{\boldsymbol{s}}$, ma questo non può essere espresso in termini di grandezze classiche, essendo una proprietà puramente quantistica. Continua però a valere la relazione che definisce il momento angolare totale anche a livello operatoriale:

$$\widehat{\boldsymbol{j}} = \widehat{\boldsymbol{l}} + \widehat{\boldsymbol{s}}. \tag{1.5}$$

In analogia con il caso classico si vuole mantenere la proprietà che se un sistema è composto da più parti, il momento angolare orbitale è dato dalla somma dei momenti angolari delle parti, cioè

$$\widehat{\boldsymbol{L}} = \sum_a \widehat{\boldsymbol{l}}_a. \tag{1.6}$$

Estendendo questa proprietà anche al momento angolare di spin si ottiene

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \sum_a \widehat{\boldsymbol{s}}_a. \tag{1.7}$$

Per cui il momento angolare totale di un sistema composto da più corpi sarà dato dall'equazione

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = \widehat{\boldsymbol{L}} + \widehat{\boldsymbol{S}}. \tag{1.8}$$

Relazioni canoniche di commutazione

Il fatto che gli osservabili in meccanica quantistica vengano descritti da operatori lineari autoaggiunti su uno spazio di Hilbert, implica che la moltiplicazione tra due di essi in generale non sia commutativa: questa proprietà è la manifestazione matematica della profonda differenza tra meccanica classica e quantistica. Per studiare le proprietà di commutatività tra due operatori si definisce il commutatore:

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}. \tag{1.9}$$

In particolare, per quanto riguarda le componenti del momento angolare orbitale valgono le relazioni

$$
\begin{aligned}
[\widehat{l}_i, \widehat{q}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{q}_k, \\
[\widehat{l}_i, \widehat{p}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{p}_k, \\
[\widehat{l}_i, \widehat{l}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{l}_k.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Dimostrazione. In virtù dell'eq.(1.4) è possibile scrivere le componenti dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{l}}$ come

$$
\widehat{l}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \widehat{q}_j \widehat{p}_k \tag{1.11}
$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita. Inoltre, facendo uso delle leggi di commutazione tra le componenti dell'operatore posizione e impulso:

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] = 0, \\
&[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0, \\
&[\widehat{q}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \widehat{1},
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

posso calcolare

$$
\begin{aligned}
[\widehat{l}_i, \widehat{q}_j] &= [\sum_{kl} \epsilon_{ikl} \widehat{q}_k \widehat{p}_l, \widehat{q}_j] = \sum_{kl} \epsilon_{ikl} (\widehat{q}_k [\widehat{p}_l, \widehat{q}_j] + [\widehat{q}_k, \widehat{q}_j] \widehat{p}_l) \\
&= \sum_{kl} \epsilon_{ikl} (-i\hbar \delta_{lj} \widehat{q}_k \widehat{1} + \widehat{0}) = -i\hbar \sum_k \epsilon_{ikl} \widehat{q}_k = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{q}_k
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
[\widehat{l}_i, \widehat{p}_j] &= [\sum_{kl} \epsilon_{ikl} \widehat{q}_k \widehat{p}_l, \widehat{p}_j] = \sum_{kl} \epsilon_{ikl} (\widehat{q}_k [\widehat{p}_l, \widehat{p}_j] + [\widehat{q}_k, \widehat{p}_j] \widehat{p}_l) \\
&= \sum_{kl} \epsilon_{ikl} (\widehat{0} + i\hbar \delta_{kj} \widehat{p}_l \widehat{1}) = i\hbar \sum_l \epsilon_{ijl} \widehat{p}_l = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{p}_k
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
[\widehat{l}_i, \widehat{l}_j] = [\widehat{l}_i, \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \widehat{q}_k \widehat{p}_l] &= \sum_{kl} \epsilon_{jkl} ([\widehat{l}_i, \widehat{q}_k] \widehat{p}_l + \widehat{q}_k [\widehat{l}_i, \widehat{p}_l]) = \\
&= \sum_{kl} \epsilon_{jkl} (i\hbar \sum_m \epsilon_{ikm} \widehat{q}_m \widehat{p}_l + i\hbar \widehat{q}_k \sum_m \epsilon_{ilm} \widehat{p}_m) \\
&= i\hbar \sum_{kl} \sum_m (\epsilon_{mik}\epsilon_{mjl} - \epsilon_{mjk}\epsilon_{mil}) \widehat{q}_k \widehat{p}_l \\
&= i\hbar \sum_m \epsilon_{mij}\epsilon_{mkl} \widehat{q}_k \widehat{p}_l = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{l}_k
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

dove nel penultimo passaggio si è usata la relazione

$$
\sum_m (\epsilon_{mik}\epsilon_{mjl} - \epsilon_{mjk}\epsilon_{mil} - \epsilon_{mij}\epsilon_{mkl}) = 0 \tag{1.16}
$$

■

Le stesse relazioni vengono estese per analogia anche al caso dello spin:

$$
\begin{aligned}
[\widehat{s}_i, \widehat{q}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{q}_k, \\
[\widehat{s}_i, \widehat{p}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{p}_k, \\
[\widehat{s}_i, \widehat{s}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{s}_k.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Inoltre il momento angolare orbitale e di spin sono due osservabili indipendenti: questo implica che

$$
[\widehat{l}_i, \widehat{s}_j] = 0. \tag{1.18}
$$

Utilizzando i risultati ottenuti, per quanto riguarda il momento angolare totale vale la relazione

$$
[\widehat{j}_i, \widehat{j}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_k. \tag{1.19}
$$

Se si considera un sistema composto da un numero arbitrario di particelle

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{L}_k, \\
[\widehat{S}_i, \widehat{S}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{S}_k, \\
[\widehat{L}_i, \widehat{S}_j] &= 0, \\
[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{J}_k.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Come si è osservato, tutti i momenti angolari descritti seguono le stesse leggi di commutazione, per cui si può definire formalmente il momento angolare come l'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ che soddisfa

$$[\widehat{j}_i, \widehat{j}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_k. \tag{1.21}$$

In più, dato che rappresenta un'osservabile, le sue componenti devono soddisfare

$$\widehat{j}_i^\dagger = \widehat{j}_i. \tag{1.22}$$

Si può definire il quadrato del momento angolare

$$\widehat{j}^2 = \widehat{\boldsymbol{j}}^2 = \sum_k \widehat{j}_k^2, \tag{1.23}$$

il quale commuta con le componenti $\widehat{j}_i$

$$[\widehat{j}_i, \widehat{j}^2] = 0, \tag{1.24}$$

ed è anch'esso autoaggiunto.

Dimostrazione. Utilizzando la legge di commutazione (1.21) e la definizione (1.23),

$$\begin{aligned}
[\widehat{j}_i, \widehat{j}^2] &= [\widehat{j}_i, \sum_k \widehat{j}_k^2] = \sum_k ([\widehat{j}_i, \widehat{j}_k]\widehat{j}_k + \widehat{j}_k[\widehat{j}_i, \widehat{j}_k]) \\
&= i\hbar \sum_k \left(\sum_j \epsilon_{ikj} \widehat{j}_j \widehat{j}_k + \widehat{j}_k \sum_j \epsilon_{ikj} \widehat{j}_j \right) = -i\hbar \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\widehat{j}_j \widehat{j}_k + \widehat{j}_k \widehat{j}_j) = 0
\end{aligned} \tag{1.25}$$

A questo punto, utilizzando la relazione (1.22) e la definizione (1.23),

$$\widehat{j}^{2\dagger} = \sum_k \widehat{j}_k^{2\dagger} = \sum_k \widehat{j}_k^{\dagger 2} = \sum_k \widehat{j}_k^2 = \widehat{j}^2 \tag{1.26}$$

■

Tornerà spesso utile in seguito scrivere le componenti dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ rispetto ad una base sferica orientata $\boldsymbol{e}_\alpha$ associata alla base ortogonale $\boldsymbol{e}_i$:

$$\widehat{j}_0 = \widehat{j}_3, \qquad \widehat{j}_{\pm 1} = \widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2 \tag{1.27}$$

In questo caso le leggi di commutazione assumono la forma

$$[\widehat{j}_0, \widehat{j}_{\pm 1}] = \pm\hbar\widehat{j}_{\pm 1} \tag{1.28}$$

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{j}_{\mp 1}] = \pm 2\hbar\widehat{j}_0 \tag{1.29}$$

mentre le relazioni di autoaggiunzione saranno

$$\widehat{j}_0^\dagger = \widehat{j}_0 \tag{1.30}$$

$$\widehat{j}_{\pm 1}^\dagger = \widehat{j}_{\mp 1} \tag{1.31}$$

Dimostrazione. Utilizzando le relazioni (1.27) e le relazioni di commutazione (1.21) si ottiene

$$\begin{aligned} [\widehat{j}_0, \widehat{j}_{\pm 1}] &= [\widehat{j}_3, \widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2] = [\widehat{j}_3, \widehat{j}_1] \pm i[\widehat{j}_3, \widehat{j}_2] \\ &= i\hbar(\widehat{j}_2 \mp i\widehat{j}_1) = \pm\hbar(\widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2) = \pm\hbar\widehat{j}_{\pm 1} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Similmente

$$\begin{aligned} [\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{j}_{\mp 1}] &= [\widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2, \widehat{j}_1 \mp i\widehat{j}_2] \\ &= [\widehat{j}_1, \widehat{j}_1] + [\widehat{j}_2, \widehat{j}_2] \mp 2i[\widehat{j}_1, \widehat{j}_2] = \pm 2\hbar\widehat{j}_3 = \pm 2\hbar\widehat{j}_0 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Per quanto riguarda le relazioni di autoaggiunzione, utilizzando (1.22)

$$\widehat{j}_{\pm 1}^{\dagger} = (\widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2)^{\dagger} = \widehat{j}_1^{\dagger} \mp i\widehat{j}_2^{\dagger} = \widehat{j}_1 \mp i\widehat{j}_2 = \widehat{j}_{\mp 1} \tag{1.34}$$

e allo stesso modo

$$\widehat{j}_0^{\dagger} = \widehat{j}_3^{\dagger} = \widehat{j}_3 = \widehat{j}_0 \tag{1.35}$$

■

Utilizzando queste componenti, è possibile esprimere il quadrato del momento angolare come

$$\widehat{j}^2 = \widehat{j}_{\pm 1}\widehat{j}_{\mp 1} + \widehat{j}_0^2 \mp \hbar\widehat{j}_0 \tag{1.36}$$

Dimostrazione. Utilizzando le definizioni (1.27) e le relazioni di commutazione (1.21) si può calcolare

$$\begin{aligned} \widehat{j}_{\pm 1}\widehat{j}_{\mp 1} &= (\widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2)(\widehat{j}_1 \mp i\widehat{j}_2) = \widehat{j}_1^2 + \widehat{j}_2^2 \mp i(\widehat{j}_1\widehat{j}_2 - \widehat{j}_2\widehat{j}_1) \\ &= \widehat{j}_1^2 + \widehat{j}_2^2 \mp i[\widehat{j}_1, \widehat{j}_2] = \widehat{j}_1^2 + \widehat{j}_2^2 \pm \hbar\widehat{j}_3 = \widehat{j}^2 - \widehat{j}_0^2 \pm \hbar\widehat{j}_0 \end{aligned} \tag{1.37}$$

■

Inoltre continuano a valere delle relazioni di commutazione analoghe alle (1.24)

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{j}^2] = 0 \tag{1.38}$$

$$[\widehat{j}_0, \widehat{j}^2] = 0 \tag{1.39}$$

Dimostrazione. Utilizzando la relazione (1.24) si ottiene

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{j}^2] = [\widehat{j}_1 \pm i\widehat{j}_2, \widehat{j}^2] = [\widehat{j}_1, \widehat{j}^2] \pm i[\widehat{j}_2, \widehat{j}^2] = 0 \tag{1.40}$$

allo stesso modo

$$[\widehat{j}_0, \widehat{j}^2] = [\widehat{j}_3, \widehat{j}^2] = 0 \tag{1.41}$$

■

Teoria spettrale del momento angolare

Tenendo conto delle relazioni di commutazione descritte precedentemente si può costruire un insieme massimale di operatori autoaggiunti commutanti utilizzando $\widehat{j}^2$ e $\widehat{j}_0$. Per noti teoremi della meccanica quantistica, questo implica che è possibile definire una base di autoket simultanei per i due operatori.

In particolare si può dimostrare che questi autoket comuni si organizzano in multipletti caratterizzati da un numero quantico semintero $j \geq 0$. Ognuno di questi multipletti $|j, m\rangle$ contiene $2j+1$ elementi, parametrizzati dal numero quantico $m = -j, -j+1, ..., j-1, j$. Inoltre valgono le seguenti relazioni agli autovalori

$$\widehat{j}^2 |j, m\rangle = |j, m\rangle \hbar^2 j(j+1) \tag{1.42}$$

$$\widehat{j}_0 |j, m\rangle = |j, m\rangle \hbar m \tag{1.43}$$

e la relazione

$$\widehat{j}_{\pm 1} |j, m\rangle = |j, m \pm 1\rangle \hbar (j(j+1) - m(m \pm 1))^{1/2} \tag{1.44}$$

Inoltre gli autoket soddisfano la relazione di ortonormalità

$$\langle j, m' | j, m\rangle = \delta_{m', m} \tag{1.45}$$

Somma di momenti angolari e coefficienti di Clebsch-Gordan

Spesso in fisica si ha a che fare con sistemi composti da un numero arbitrario di particelle e quindi ci si scontra con il problema della somma di momenti angolari. Se considero due particelle con momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}_1$ e $\widehat{\boldsymbol{j}}_2$ rispettivamente, sono ovvie le relazioni

$$\begin{aligned}
[\widehat{j}_{1_i}, \widehat{j}_{1_j}] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_{1_k}, \\
[\widehat{j}_{2_i}, \widehat{j}_{2_j}] &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_{2_k}, \\
[\widehat{j}_{1_i}, \widehat{j}_{2_j}] &= 0,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

dove l'ultima relazione segue dal fatto che le due grandezze sono indipendenti tra loro.

Queste leggi di commutazione implicano che gli operatori $\widehat{j}_1^2$, $\widehat{j}_{1_0}$, $\widehat{j}_2^2$ e $\widehat{j}_{2_0}$ formano un insieme massimale di operatori autoaggiunti commutanti. Come chiarito in precedenza questo significa che esiste sempre una base di autoket simultanei per i quattro operatori che si organizzano in multipletti $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ caratterizzati da due numeri seminteri $j_1, j_2 \geq 0$ i quali contengono $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ elementi, identificati dai due numeri quantici m_1 e m_2, i quali possono assumere i valori $m_1 = -j_1, -j_1 + 1, ..., j_1 - 1, j_1$, $m_2 = -j_2, -j_2 + 1, ..., j_2 - 1, j_2$ rispettivamente. Inoltre valgono le relazioni

$$\widehat{j}_1^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar^2 j_1(j_1 + 1) \tag{1.47}$$

$$\widehat{j}_{1_0} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar m_1 \tag{1.48}$$

$$\widehat{j}_{1_{\pm1}} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1 \pm 1, j_2, m_2\rangle \hbar(j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 \pm 1))^{1/2} \tag{1.49}$$

$$\widehat{j}_2^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar^2 j_2(j_2 + 1) \tag{1.50}$$

$$\widehat{j}_{2_0} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar m_2 \tag{1.51}$$

$$\widehat{j}_{2_{\pm1}} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2 \pm 1\rangle \hbar(j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 \pm 1))^{1/2} \tag{1.52}$$

Inoltre vale la relazione di ortonormalità

$$\langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \delta_{m_1', m_1} \delta_{m_2', m_2} \tag{1.53}$$

Il momento angolare totale è definito come

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = \widehat{\boldsymbol{j}}_1 + \widehat{\boldsymbol{j}}_2 \tag{1.54}$$

ed essendo un momento angolare soddisfa

$$[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{J}_k, \tag{1.55}$$

e anche

$$\widehat{J}_i^\dagger = \widehat{J}_i. \tag{1.56}$$

Dimostrazione. Utilizzando la definizione (1.54) e le relazioni (1.46)

$$\begin{aligned}[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j] &= [\widehat{j}_{1i} + \widehat{j}_{2i}, \widehat{j}_{1j} + \widehat{j}_{2j}] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_{1k} + i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_{2k} \\ &= i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} (\widehat{j}_{1k} + \widehat{j}_{2k}) = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{J}_k\end{aligned} \tag{1.57}$$

Per la relazione (1.22)

$$\widehat{J}_i^\dagger = \widehat{j}_{1i}^\dagger + \widehat{j}_{2i}^\dagger = \widehat{j}_{1i} + \widehat{j}_{2i} = \widehat{J}_i \tag{1.58}$$

■

Inoltre è banale dimostrare che i quadrati $\widehat{j}_1^2$ e $\widehat{j}_2^2$ commutano con le componenti $\widehat{J}_i$, cioè

$$[\widehat{J}_i, \widehat{j}_1^2] = 0, \tag{1.59}$$

$$[\widehat{J}_i, \widehat{j}_2^2] = 0. \tag{1.60}$$

Per quanto appena detto, si deduce che anche gli operatori $\widehat{j}_1^2$, $\widehat{j}_2^2$, $\widehat{J}^2$ e $\widehat{J}_0$ formano un insieme di operatori autoaggiunti commutanti. Questo significa che esiste sempre una base di autoket simultanei per i quattro operatori che si organizzano in multipletti $|j_1, j_2, J, M\rangle$ caratterizzati da tre numeri seminteri $j_1, j_2, J \geq 0$ i quali contengono $2J+1$

elementi, identificati dal numero quantico M, che può assumere i valori $M = -J, -J + 1, ..., J-1, J$. Inoltre valgono le relazioni

$$\widehat{j}_1^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 j_1(j_1+1) \tag{1.61}$$

$$\widehat{j}_2^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 j_2(j_2+1) \tag{1.62}$$

$$\widehat{J}^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 J(J+1) \tag{1.63}$$

$$\widehat{J}_0 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar M \tag{1.64}$$

$$\widehat{J}_{\pm 1} \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M \pm 1\right\rangle \hbar (J(J+1) - M(M \pm 1))^{1/2} \tag{1.65}$$

Inoltre vale la relazione di ortonormalità

$$\langle j_1, j_2, J, M' | j_1, j_2, J, M\rangle = \delta_{M',M} \tag{1.66}$$

Se si considerano i $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ descritti in precedenza per un sistema di due particelle, allora è possibile dimostrare che lo spazio $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ generato da questi ket ammette una base composta dai ket $|j_1, j_2, J, M\rangle$, dove $M = -J, ..., J$ e J assume i valori nell'intervallo $|j_1 - j_2|, ..., j_1 + j_2$ una sola volta. La relazione

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq |j_1 + j_2| \tag{1.67}$$

è la controparte quantistica della relazione vettoriale classica $||\boldsymbol{j}_1| - |\boldsymbol{j}_2|| \leq |\boldsymbol{J}| \leq |\boldsymbol{j}_1| + |\boldsymbol{j}_2|$.

Dato che in questo modo sono state trovate due basi diverse per lo stesso spazio, deve essere possibile esprimere gli elementi dell'una in termini di quelli dell'altra, cioè:

$$\left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left|j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle \tag{1.68}$$

dove i coefficienti

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle = \langle j_1, m_2, j_2, m_2 | j_1, j_2, J, M\rangle \tag{1.69}$$

sono detti coefficienti di Clebsch-Gordan.

I fattori $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle$ sono soggetti a quelle che vengono chiamate regole di selezione, le quali definiscono degli intervalli al di fuori dei quali i coefficienti si annullano e discendono dalle relazioni che legano tra loro i numeri quantici in gioco:

- Una delle tre relazioni deve essere valida, le altre discendono di conseguenza

$$\begin{aligned} |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, \\ |J - j_1| \leq j_2 \leq J + j_1, \\ |J - j_2| \leq j_1 \leq J + j_2. \end{aligned} \tag{1.70}$$

- Per quanto riguarda i numeri quantici m_1, m_2 e M

$$\begin{aligned} -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \\ -j_2 \leq m_2 \leq j_2, \\ -J \leq M \leq J. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Inoltre valgono alcune relazioni che legano questi coefficienti delle quali verrà fatto uso in seguito:

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle M = (m_1 + m_2) \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle, \tag{1.72}$$

da cui si deduce che un qualsiasi coefficiente di Clebsch-Gordan si annulla ogni volta che la relazione

$$M = m_1 + m_2 \tag{1.73}$$

non viene soddisfatta. Inoltre vale che

$$\begin{aligned} &\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \pm 1\rangle (J(J+1) - M(M \pm 1))^{1/2} \\ &\qquad = (j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1))^{1/2} \langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | J, M\rangle \\ &\qquad\quad + (j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1))^{1/2} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | J, M\rangle \end{aligned} \tag{1.74}$$

Si può osservare che, fissando il valore di J, tutti i possibili coefficienti di Clebsch-Gordan si possono ottenere a partire da un unico termine $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, \pm J\rangle$ e utilizzando ricorsivamente l'eq.(1.74).

Capitolo 2

Rotazioni, momento angolare e operatori covarianti per rotazione

In questo capitolo verrà descritta la teoria delle rotazioni ed in particolare come queste agiscono nei sistemi quantistici attraverso determinati operatori. Infine verranno descritti ed analizzati tre importati tipologie di operatori covarianti per rotazione: gli operatori scalari, quelli vettoriali e infine quelli diadici simmetrici a traccia nulla, analizzando anche le possibili operazioni tra di essi.

2.1 Il legame tra rotazioni e momento angolare

Prima di poter definire formalmente il concetto di rotazione, è conveniente introdurre la nozione di gruppo astratto.

Definizione. Un *gruppo astratto* $\mathcal{G} = \{g\}$ è una struttura algebrica dotata di un'operazione binaria $\bullet$ che soddisfa le seguenti proprietà

- chiusura rispetto alla legge di composizione, la quale è associativa

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad g_1 \bullet g_2 = g_3 \in \mathcal{G} \tag{2.1}$$

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad (g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3) \tag{2.2}$$

- esistenza dell'elemento neutro

$$\exists!\ e \in \mathcal{G} \qquad t.c. \qquad g \bullet e = e \bullet g = g \qquad \forall g \in \mathcal{G} \tag{2.3}$$

- esistenza dell'inverso

$$\exists!\ g^{-1} \in \mathcal{G} \qquad t.c. \qquad g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e \quad \forall g \in \mathcal{G} \tag{2.4}$$

Definizione. Una *rotazione* è una mappa lineare definita su uno spazio vettoriale V dotato di prodotto interno con la proprietà di conservare la distanza tra due punti. Quest'applicazione è caratterizzata dall'azione di una matrice $\boldsymbol{R}$ sugli elementi $\boldsymbol{x}$ dello spazio

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} \tag{2.5}$$

tale che

$$|\boldsymbol{x'}| = |\boldsymbol{x}| \tag{2.6}$$

Queste matrici di rotazione soddisfano le proprietà (2.1)-(2.4) dove la legge di composizione è data dall'usuale prodotto associativo tra matrici $(\cdot)$, infatti

- se considero due rotazioni $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$, il loro prodotto $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S}$ è di nuovo una rotazione
- La matrice identità $\mathbf{1}$ è l'elemento neutro della moltiplicazione: $\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$
- per ogni rotazione $\boldsymbol{R}$ esiste una matrice indicata con $\boldsymbol{R}^{-1}$ tale che $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{R} = \mathbf{1}$

per cui si può concludere che le rotazioni in uno spazio costituiscono un gruppo.

Ogni matrice di rotazione è specificata univocamente da un angolo di rotazione φ e da un asse di rotazione indicato con il vettore unitario $\boldsymbol{n}$, per cui conviene indicarla esplicitando questi due parametri

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \boldsymbol{n}). \tag{2.7}$$

Avendo introdotto questa nuova notazione, le proprietà di gruppo possono essere riscritte:

- Per ogni rotazione $\boldsymbol{\Lambda}(\alpha, \boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{\Lambda}(\beta, \boldsymbol{k})$, la loro composizione sarà data da una nuova matrice $\boldsymbol{\Lambda}(\alpha, \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\beta, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\Lambda}(\gamma(\alpha, \beta, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{m}(\alpha, \beta, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}))$ dove $\gamma(\alpha, \beta, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ e $\boldsymbol{m}(\alpha, \beta, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ sono funzioni che dipendono dai parametri di rotazione $\alpha, \beta, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ed hanno una forma non banale, salvo alcuni casi particolari.

- La matrice identica è data dalla rotazione di un angolo nullo, per cui $\mathbf{1} = \boldsymbol{\Lambda}(0, \boldsymbol{n})$, con $\boldsymbol{n}$ vettore unitario arbitrario.

- La matrice inversa è $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\Lambda}(-\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\Lambda}(\varphi, -\boldsymbol{n})$

Per un angolo infinitesimo $\delta\varphi$, una rotazione infinitesima di un vettore $\boldsymbol{x}$ può essere scritta

$$\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \delta\varphi \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} + O(\delta\varphi^2) \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alla fig.(2.1), è possibile esprimere

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x'_\parallel} + \boldsymbol{x'_\perp} \tag{2.9}$$

dove

$$\boldsymbol{x'_\parallel} = \boldsymbol{x_\parallel} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} \tag{2.10}$$

dove è stata introdotta la matrice $\boldsymbol{nn}$.

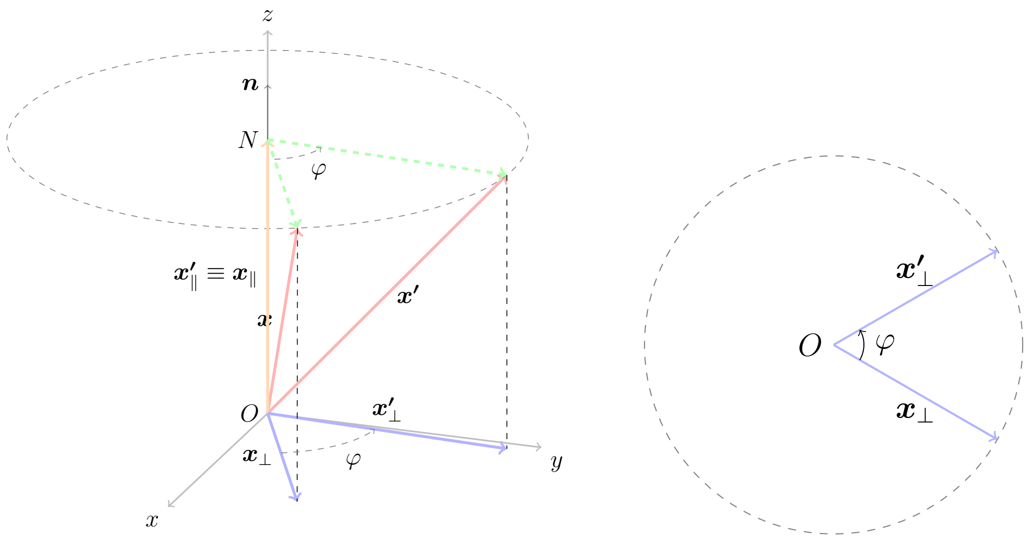

Figura 2.1: A sinistra vengono mostrati il vettore generico $\boldsymbol{x}$ e la sua rotazione $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x'}$. A destra invece è mostrata la proiezione dei due vettori sul piano xy

Utilizzando il risultato (2.10), il secondo termine è dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'}_\perp &= \boldsymbol{x}_\perp \cos\varphi + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}_\perp) \sin\varphi \\ &= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel) \cos\varphi + (\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel)) \sin\varphi \\ &= \boldsymbol{x} \cos\varphi - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} \cos\varphi + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} \sin\varphi \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

Unendo i risultati (2.10),(2.11) secondo l'eq.(2.9), si ottiene

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} \sin\varphi \tag{2.12}$$

Considerando a questo punto una rotazione infinitesima di un angolo $\delta\varphi$, posso sviluppare in serie di Taylor

$$\sin\delta\varphi = \delta\varphi + O(\delta\varphi^2) \qquad \cos\delta\varphi = 1 + O(\delta\varphi^2) \tag{2.13}$$

Sostituendo queste approssimazioni nell'eq.(2.12) si ottiene

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} - \delta\varphi \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n} + O(\delta\varphi^2) \tag{2.14}$$

■

da cui discende l'equazione (2.8).

È utile introdurre la matrice 3×3 $*\boldsymbol{n}$ così definita

$$* \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

In questo modo è possibile scrivere il prodotto vettoriale come il prodotto tra una matrice ed un vettore

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} = - * \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} n_2 x_3 - n_3 x_2 \\ n_3 x_1 - n_1 x_3 \\ n_1 x_2 - n_2 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x})_1 \\ (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x})_2 \\ (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x})_3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Con questo procedimento si ricava l'espressione della matrice che descrive una rotazione infinitesima di angolo $\delta\varphi$ attorno all'asse $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}) = \mathbf{1} - \delta\varphi * \boldsymbol{n} + O(\delta\varphi^2) \tag{2.17}$$

Considerando una rotazione finita di un angolo φ attorno ad un asse $\boldsymbol{n}$ come la successiva composizione di rotazioni infinitesime si ottiene

$$\boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \boldsymbol{n}) = \lim_{N\to\infty} [\boldsymbol{\Lambda}(\varphi/N, \boldsymbol{n})]^N = \lim_{N\to\infty} [\mathbf{1} - \varphi/N * \boldsymbol{n}]^N = \exp\{(-\varphi * \boldsymbol{n})\} \tag{2.18}$$

In questo modo si dimostra quanto asserito in (2.7), cioè che una generica rotazione, finita o infinitesima, è completamente definita da due soli parametri: l'asse di rotazione $\boldsymbol{n}$ e l'angolo di rotazione φ.

Ogni sistema fisico s è rappresentato da ket normalizzati $|\psi\rangle$ a meno di una fase moltiplicativa. Se $\boldsymbol{R}$ è una rotazione in grado di ruotare un generico stato da s a s', allora è intuitivo pensare che il nuovo ket rappresentativo sia del tipo $\left|{}^{\boldsymbol{R}}\psi\right\rangle$. Se questo è vero, significa che esiste una mappa agente sullo spazio di Hilbert in grado di realizzare questa rotazione

$$\widehat{U}(\boldsymbol{R}) : |\psi\rangle \longmapsto \widehat{U}(\boldsymbol{R})\,|\psi\rangle \equiv \left|{}^{\boldsymbol{R}}\psi\right\rangle \tag{2.19}$$

In più viene richiesto che il nuovo ket sia normalizzato come quello iniziale dato che la probabilità complessiva deve conservarsi

$$\left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi \middle| {}^{\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{2.20}$$

Questo fatto implica che l'operatore $\widehat{U}(\boldsymbol{R})$ sia unitario, cioè

$$\widehat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger} = \widehat{U}(\boldsymbol{R})^{-1} \tag{2.21}$$

Dimostrazione. Utilizzando la proprietà (2.20) e la definizione (2.19) si trova che

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi \middle| {}^{\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle = \langle\psi|\widehat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\widehat{U}(\boldsymbol{R})|\psi\rangle \tag{2.22}$$

per un arbitrario ket $|\psi\rangle$. Dato che $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\widehat{1}|\psi\rangle$, questo significa che

$$\widehat{1} = \widehat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\widehat{U}(\boldsymbol{R}) \tag{2.23}$$

da cui deriva l'eq.(2.21) ■

Applicando due rotazioni consecutive $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ ad uno stato s si ottiene lo stato ruotato ${}^{\boldsymbol{S}}({}^{\boldsymbol{R}}s) = {}^{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R}}s$, di conseguenza i ket saranno

$$\left| {}^{\boldsymbol{S}}({}^{\boldsymbol{R}}\psi) \right\rangle = z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, |\psi\rangle) \left| {}^{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle \tag{2.24}$$

dove $z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, |\psi\rangle)$ è una fase non banale.

Utilizzando la definizione (2.19), a livello operatoriale l'equazione (2.24) diventa

$$\widehat{U}(\boldsymbol{S})\widehat{U}(\boldsymbol{R})\,|\psi\rangle = z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, |\psi\rangle) \left| {}^{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle = z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, |\psi\rangle)\widehat{U}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R})\,|\psi\rangle \tag{2.25}$$

In questo caso, dato che il primo membro è lineare in $|\psi\rangle$, lo sarà anche il secondo: per questo motivo $z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, |\psi\rangle) = z(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S})$. Ricordando che i ket di un sistema sono definiti a meno di una fase, è possibile dimostrare il fatto non banale che ogni operatore $\widehat{U}(\boldsymbol{R})$ è esprimibile come $\zeta(\boldsymbol{R})\widehat{U}(\boldsymbol{R})$, dove $\zeta(\boldsymbol{R})$ è una fase che non cambia il significato fisico di $\widehat{U}(\boldsymbol{R})$. In questo modo posso fissare $\zeta(\boldsymbol{R})$ in modo tale che

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\boldsymbol{R^{-1}}) &= \widehat{U}(\boldsymbol{R})^{-1} \\ \widehat{U}(\mathbf{1}) &= \widehat{1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Tenendo conto del fatto che nell'espressione della rotazione infinitesima (2.17) $\delta\varphi$ compare sempre nella combinazione $\delta\varphi\boldsymbol{n}$, l'operatore ad essa associato può essere scritto nella forma

$$\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n})) = \widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}} + O(\delta\varphi^2) \tag{2.27}$$

dove $\widehat{\boldsymbol{j}}$ è un operatore generico. Per convenienza è stato estratto il fattore $-i\hbar$.

È possibile dimostrare che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ è autoaggiunto e in particolare soddisfa la relazione di commutazione

$$[\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{l}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}] = i\hbar(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})\cdot\widehat{\boldsymbol{j}} \tag{2.28}$$

per vettori $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ generici.

Dimostrazione. Calcolando l'operatore aggiunto e l'inverso ottengo

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}))^{\dagger} &= \widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}^{\dagger} + O(\delta\varphi^2) \\ \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}))^{-1} &= \widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}} + O(\delta\varphi^2) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dato che $\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}))$ è unitario, si deduce che $\widehat{\boldsymbol{j}}^{\dagger} = \widehat{\boldsymbol{j}}$: questo implica che $\widehat{\boldsymbol{j}}$ è autoaggiunto.

Per ricavare la legge di commutazione si considerano le rotazioni $\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\beta\varphi, \boldsymbol{l})$. Allora, applicando (2.17),

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l}) \\ &\qquad = (\mathbf{1} + \delta\alpha * \boldsymbol{k})(\mathbf{1} + \delta\beta * \boldsymbol{l})(\mathbf{1} - \delta\alpha * \boldsymbol{k})(\mathbf{1} - \delta\beta * \boldsymbol{l}) + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \\ &\qquad = \mathbf{1} + \delta\alpha\delta\beta(*\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} - *\boldsymbol{l} * \boldsymbol{k}) + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dove il simbolo $O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2)$ indica tutti i termini quadratici in $\delta\alpha$ o $\delta\beta$.

Per valutare la matrice $(*\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} - *\boldsymbol{l} * \boldsymbol{k})$, si applica ad essa il vettore generico $\boldsymbol{x}$ e facendo uso della relazione (2.16) si ottiene:

$$\begin{aligned}(*\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} - *\boldsymbol{l} * \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x} &= *\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{x} - *\boldsymbol{l} * \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} \\ &= *\boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{x}) - *\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{x}) \\ &= -\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}) = - * (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{2.31}$$

dove nel penultimo passaggio si è fatto uso dell'identità di Jacobi per il prodotto vettoriale tra tre termini

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{2.32}$$

Quindi si è ottenuto che

$$\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k}) \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l}) = \mathbf{1} - \delta\alpha\delta\beta * (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}) + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \tag{2.33}$$

Dal punto di vista operatoriale, in virtù dell'eq.(2.27) e tenendo conto dell'equazione (2.33)

$$\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k}) \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})) = \mathbf{1} - i\hbar\delta\alpha\delta\beta(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}) \cdot \widehat{\boldsymbol{j}} + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \tag{2.34}$$

inoltre per l'eq.(2.25)

$$\begin{aligned}&\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k}) \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})) \\ &\quad = \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k}))^{-1} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l}))^{-1} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})) \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l}))\end{aligned} \tag{2.35}$$

Utilizzando l'equazione (2.27) posso calcolare i singoli operatori

$$\begin{aligned}&\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k}))^{-1} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l}))^{-1} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \boldsymbol{k})) \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \boldsymbol{l})) \\ &\quad = (\widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\alpha \boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})(\widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\beta \boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})(\widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\alpha \boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}) \\ &\qquad \times (\widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\beta \boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}) + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \\ &\quad = \mathbf{1} - \hbar^2 \delta\alpha\delta\beta[(\boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})(\boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}) - (\boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})(\boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})] + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \\ &\quad = \mathbf{1} - \hbar^2 \delta\alpha\delta\beta[\boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}] + O(\delta\alpha^2, \delta\beta^2)\end{aligned} \tag{2.36}$$

Confrontando i risultati di (2.34) e (2.36) ottengo

$$[\boldsymbol{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{l} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}] = i\hbar(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}) \cdot \widehat{\boldsymbol{j}} \tag{2.37}$$

■

Ponendo nell'equazione (2.28) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_j$, dove gli $\boldsymbol{e}_i$ rappresentano gli elementi di una base orientata, si ottengono le regole di commutazione per le componenti dell'opertatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$

$$[\widehat{j}_i, \widehat{j}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{j}_k \tag{2.38}$$

Grazie a queste regole di commutazione e alla proprietà di autoaggiunzione dell'operatore, è possibile concludere che $\widehat{\boldsymbol{j}}$ rappresenta un momento angolare.

In particolare esso è il generatore infinitesimo delle rotazioni, infatti l'operatore che descrive una rotazione finita può essere scritto come

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \boldsymbol{n})) &= \widehat{U}(\lim_{N\to\infty} [\boldsymbol{\Lambda}(\varphi/N, \boldsymbol{n})]^N) = \lim_{N\to\infty} \widehat{U}([\boldsymbol{\Lambda}(\varphi/N, \boldsymbol{n})]^N) \\ &= \lim_{N\to\infty} (\mathbf{1} - i\hbar^{-1}\varphi/N\boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}})^N = \exp\Big(-i\hbar^{-1}\boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}\Big) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Per comprendere meglio il significato fisico dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ si possono considerare gli autobra $\langle \boldsymbol{x}|$ dell'operatore posizione $\widehat{\boldsymbol{q}}$ parametrizzati da punti dello spazio delle configurazioni. L'ipotesi più ragionevole di trasformazione sotto rotazione è

$$\langle \boldsymbol{x}| \, \widehat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger = \langle \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}| \tag{2.40}$$

Seguendo questo ragionamento, è possibile esprimere la rotazione infinitesima di $\langle \psi|$

come

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\,\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n}))^{\dagger} &= \big\langle(\boldsymbol{1}-\delta\varphi \ast \boldsymbol{n}+O(\delta\varphi^{2}))\boldsymbol{x}\big| \\
&= \big\langle\boldsymbol{x}-\delta\varphi \ast \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+O(\delta\varphi^{2})\big| \\
&= \big\langle\boldsymbol{x}+\delta\varphi\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}+O(\delta\varphi^{2})\big| \\
&= \langle\boldsymbol{x}| + \delta\varphi\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}\cdot\nabla\,\langle\boldsymbol{x}| + O(\delta\varphi^{2}) \\
&= \langle\boldsymbol{x}| + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot(-i\hbar)\boldsymbol{x}\times\nabla\,\langle\boldsymbol{x}| + O(\delta\varphi^{2}) \\
&= (\boldsymbol{1}+i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l})\,\langle\boldsymbol{x}| + O(\delta\varphi^{2})
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

per cui

$$
\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n})) = \boldsymbol{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l} + O(\delta\varphi^{2}) \tag{2.42}
$$

Confrontando questo risultato con l'equazione (2.27) si deduce che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ trovato in precedenza è esattamente il momento angolare orbitale.

Questo ragionamento può essere generalizzato anche a particelle con spin. In questo caso l'operatore $\widehat{\boldsymbol{q}}$ non costituisce più un insieme completo di operatori autoaggiunti commutanti, per cui bisogna introdurre l'operatore di spin $\widehat{s}_3$: così facendo l'insieme diventa completo ed è possibile definire una base ortonormale di autobra simultanei per i due operatori: $\langle\boldsymbol{x},m_s|$, dove $m_s=-s,\dots,s$ ed s è il numero quantico di spin. Applicando ad esso una rotazione, si ottiene un nuovo autobra per l'operatore $\widehat{\boldsymbol{q}}$, ma in generale non per l'operatore $\widehat{s}_3$, questo significa che vale una relazione del tipo

$$
\langle\boldsymbol{x},m_s|\,\widehat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger} = \sum_{m'_s=-s}^{s} D^{(s)}_{m_s,m'_s}(\boldsymbol{R}^{-1})\,\langle\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{x},m'_s| \tag{2.43}
$$

dove $D^{(s)}_{m_s,m'_s}(\boldsymbol{R}^{-1})$ è una matrice $(2s+1)\times(2s+1)$ che mescola tra di loro le componenti dello spin, per questo motivo dipende dai numeri quantici m_s, m'_s, s e dalla rotazione $\boldsymbol{R}$.

Come prima, sviluppando per un angolo infinitesimo si ottiene

$$\langle \boldsymbol{x}, m_s | \, \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi))^\dagger =$$
$$= \sum_{m'_s=-s}^{s} (\boldsymbol{\delta}_{m'_s,m_s} + i\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m'_s,m_s} + O(\delta\varphi^2)) \left\langle \boldsymbol{x} + i\hbar\delta\varphi \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} + O(\delta\varphi^2), m'_s \right| \tag{2.44}$$

dove viene mantenuta la dipendenza $\delta\varphi\boldsymbol{n}$ in analogia con le rotazioni infinitesime. In questo caso la matrice di vettori $\boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m'_s,m_s}$ rappresenta la deviazione della matrice $D^{(s)}_{m_s,m'_s}(\boldsymbol{R})$ dall'identità $\boldsymbol{\delta}_{m'_s,m_s}$.

Procedendo con il calcolo dell'equazione precedente

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{x}, m_s | \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi))^\dagger = \\
&\quad = \langle \boldsymbol{x}, m_s | + \delta\varphi \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x} \cdot \nabla \langle \boldsymbol{x}, m_s | + \sum_{m'_s=-s}^{s} i\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m'_s,m_s} \langle \boldsymbol{x}, m'_s | + O(\delta\varphi^2) \\
&\quad = \langle \boldsymbol{x}, m_s | + i\hbar^{-1}\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot [-i\hbar \boldsymbol{x} \times \nabla \langle \boldsymbol{x}, m_s | + \sum_{m'_s=-s}^{s} \hbar \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m'_s,m_s} \langle \boldsymbol{x}, m'_s |] + O(\delta\varphi^2) \\
&\quad = \langle \boldsymbol{x}, m'_s | \, (\widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot (\widehat{\boldsymbol{l}} + \widehat{\boldsymbol{s}})) + O(\delta\varphi^2)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

avendo posto

$$\langle \boldsymbol{x}, m'_s | \, \widehat{\boldsymbol{s}} = \sum_{m'_s=-s}^{s} \hbar \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m'_s,ms} \langle \boldsymbol{x}, m'_s | \tag{2.46}$$

Confrontando i risultati ottenuti con l'eq.(2.27), si può concludere che l' operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ che compare come generatore delle rotazioni infinitesime

$$\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n})) = \widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}} + O(\delta\varphi^2) \tag{2.47}$$

è esattamente il momento angolare totale del sistema considerato

$$\widehat{\boldsymbol{j}} = \widehat{\boldsymbol{l}} + \widehat{\boldsymbol{s}} \tag{2.48}$$

2.2 Operatori covarianti per rotazione

In questa sezione verranno elencati tre tipi di operatori di particolare importanza per la meccanica quantistica: gli scalari, gli operatori vettoriali e quelli diadici simmetrici a traccia nulla, elencando le diverse proprietà che caratterizzano ognuno di essi.

2.2.1 Gli operatori scalari

Definizione. Si dice che un certo osservabile A è uno *scalare* rispetto al momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}$ se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$ la probabilità di ottenere una certa misura di A è la stessa sia in s che in ${}^{\boldsymbol{R}}s$, cioè

$$\langle A\rangle_{{}^{\boldsymbol{R}}s} = \langle A\rangle_s \tag{2.49}$$

In termini formali l'osservabile è espresso dall'operatore $\widehat{A}$, per cui l'equazione precedente diventa

$$\left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi\middle|\widehat{A}\middle|{}^{\boldsymbol{R}}\psi\right\rangle = \langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle \tag{2.50}$$

Operatori che soddisfano questa proprietà sono detti *operatori scalari.*

Per la definizione (2.19), posso scrivere

$$\left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi\middle|\widehat{A}\middle|{}^{\boldsymbol{R}}\psi\right\rangle = \langle\psi|\widehat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger\widehat{A}\widehat{U}(\boldsymbol{R})|\psi\rangle = \langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle \tag{2.51}$$

Per l'autoaggiunzione di $\widehat{A}$, l'equazione precedente implica che

$$\widehat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger\widehat{A}\widehat{U}(\boldsymbol{R}) = \widehat{A} \tag{2.52}$$

L'equazione (2.52) significa che ogni qual volta una grandezza venga descritta da un operatore scalare, essa non possa cambiare a seguito di una rotazione del sistema.

Una proprietà fondamentale degli operatori scalari è che

$$[\boldsymbol{a}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{A}] = 0 \tag{2.53}$$

per qualsiasi vettore $\boldsymbol{a}$.

Dimostrazione. Se considero una rotazione infinitesima $\delta\varphi$ attorno all'asse $\boldsymbol{n}$ (eq. (2.27)), è possibile calcolare

$$\begin{aligned}\widehat{A} =& \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n}))^{\dagger}\widehat{A}\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n})) \\ &= (\widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}})\widehat{A}(\widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}) + O(\delta\varphi^2) \\ &= \widehat{A} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\widehat{A}(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}) + i\hbar^{-1}\delta\varphi(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}})\widehat{A} + O(\delta\varphi^2) \\ &= \widehat{A} + i\hbar^{-1}\delta\varphi[\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}},\widehat{A}] + O(\delta\varphi^2)\end{aligned} \tag{2.54}$$

Quindi perchè valga l'equazione (2.52), il secondo termine dell'ultima espressione deve annullarsi, per cui deve annullarsi il commutatore

$$[\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}},\widehat{A}] = 0 \tag{2.55}$$

■

Chiamando $\widehat{j}_i$ le componenti dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ rispetto ad una base orientata $\boldsymbol{e}_i$, la relazione precedente diventa

$$[\widehat{j}_i,\widehat{A}] = 0 \tag{2.56}$$

Quindi ogni volta che l'eq.(2.52) oppure l'eq.(2.56) viene soddisfatta, è possibile concludere che $\widehat{A}$ è un operatore scalare.

Un esempio di operatore scalare è il quadrato del momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}^2$

$$[\widehat{j}_i,\widehat{\boldsymbol{j}}^2] = 0 \tag{2.57}$$

In particolare, quando per momento angolare si intende il momento angolare orbitale, valgono le leggi di commutazione

$$\begin{aligned}&[\widehat{l}_i,\widehat{\boldsymbol{q}}^2] = 0 \\ &[\widehat{l}_i,\widehat{\boldsymbol{p}}^2] = 0\end{aligned} \tag{2.58}$$

Dimostrazione. Utilizzando le definizioni degli operatori $\widehat{\boldsymbol{j}}^2$,$\widehat{\boldsymbol{q}}^2$ e $\widehat{\boldsymbol{p}}^2$ insieme alle regole di commutazione del momento angolare con gli operatori $\widehat{q}_i$, $\widehat{p}_i$ e $\widehat{j}_i$ stesso, si dimostra quanto asserito

$$\begin{aligned}[\widehat{j}_i, \widehat{\boldsymbol{j}}^2] = [\widehat{j}_i, \sum_j \widehat{j}_j^{\,2}] = \sum_j [\widehat{j}_i, \widehat{j}_j^{\,2}] = \sum_j ([\widehat{j}_i, \widehat{j}_j]\widehat{j}_j + \widehat{j}_j[\widehat{j}_i, \widehat{j}_j]) \\ = i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}(\widehat{j}_k\widehat{j}_j + \widehat{j}_j\widehat{j}_k) = 0\end{aligned} \tag{2.59}$$

In modo analogo

$$\begin{aligned}[\widehat{l}_i, \widehat{\boldsymbol{q}}^2] = [\widehat{l}_i, \sum_j \widehat{q}_j^{\,2}] = \sum_j [\widehat{l}_i, \widehat{q}_j^{\,2}] = \sum_j ([\widehat{l}_i, \widehat{q}_j]\widehat{q}_j + \widehat{q}_j[\widehat{l}_i, \widehat{q}_j]) \\ = i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}(\widehat{q}_k\widehat{q}_j + \widehat{q}_j\widehat{q}_k) = 0\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}[\widehat{l}_i, \widehat{\boldsymbol{p}}^2] = [\widehat{l}_i, \sum_j \widehat{p}_j^{\,2}] = \sum_j [\widehat{l}_i, \widehat{p}_j^{\,2}] = \sum_j ([\widehat{l}_i, \widehat{p}_j]\widehat{p}_j + \widehat{p}_j[\widehat{l}_i, \widehat{p}_j]) \\ = i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}(\widehat{p}_k\widehat{p}_j + \widehat{p}_j\widehat{p}_k) = 0\end{aligned} \tag{2.61}$$

■

2.2.2 Gli operatori vettoriali

Definizione. Si dice che un osservabile $\boldsymbol{V}$ è un *vettore* rispetto al momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}$ se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$ la probabilità di ottenere una certa misura della grandezza ruotata $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}$ nel sistema s è uguale a quella ottenuta misurando $\boldsymbol{V}$ nello stato ruotato s', in formule

$$\langle \boldsymbol{V} \rangle_{\boldsymbol{R}_s} = \boldsymbol{R} \cdot \langle \boldsymbol{V} \rangle_s \tag{2.62}$$

In termini formali l'osservabile è espresso dall'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}$, per cui l'equazione precedente diventa

$$\left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi \middle| \widehat{\boldsymbol{V}} \middle| {}^{\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \widehat{\boldsymbol{V}} | \psi \rangle \tag{2.63}$$

Operatori che soddisfano questa proprietà sono detti *operatori vettoriali.*

Utilizzando la definizione (2.19), l'equazione precedente implica che

$$\widehat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger \widehat{\boldsymbol{V}} \widehat{U}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} \tag{2.64}$$

Per ogni operatore vettoriale e per ogni vettore generico $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ vale la relazione di commutazione

$$[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}] = i\hbar \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} \tag{2.65}$$

Dimostrazione. Utilizzando le eq.(2.27) e (2.17) per l'operatore e la matrice che descrivono una rotazione infinitesima, posso valutare i due membri dell'eq.(2.64)

- I membro

$$\begin{aligned} &\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}))^\dagger \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} \widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n})) \\ &\qquad = (\boldsymbol{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}) \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} (\boldsymbol{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}) + O(\delta\varphi^2) \\ &\qquad = \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} + i\hbar^{-1}\delta\varphi [\boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}] + O(\delta\varphi^2) \end{aligned} \tag{2.66}$$

- II membro

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}) \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} &= \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} - \delta\varphi (\boldsymbol{b} \cdot *\boldsymbol{n}) \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} + O(\delta\varphi^2) \\ &= \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} + \delta\varphi (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}) \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} + O(\delta\varphi^2) \\ &= \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} - \delta\varphi \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} + O(\delta\varphi^2) \end{aligned} \tag{2.67}$$

Eguagliando i risultati ottenuti si ottiene

$$[\boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}] = i\hbar \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} \tag{2.68}$$

■

Utilizzando questo risultato ponendo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e_i}$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e_j}$ si ottiene la relazione di commutazione tra le componenti di $\widehat{\boldsymbol{j}}$ e $\widehat{\boldsymbol{V}}$

$$[\widehat{j}_i, \widehat{V}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \widehat{V}_k \tag{2.69}$$

Quindi ogni volta che l'eq.(2.64) oppure l'eq.(2.69) viene soddisfatta, sarà possibile dire che $\widehat{\boldsymbol{V}}$ è un operatore vettoriale.

Verranno elencate ora alcune proprietà degli operatori vettoriali.

- Se considero $\widehat{A}$ operatore scalare e $\widehat{\boldsymbol{X}}$ operatore vettoriale, allora i prodotti $\widehat{A}\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{A}$ sono operatori vettoriali.

Dimostrazione. Utilizzando l'eq.(2.65) e la proprietà degli operatori scalari (2.56)

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{A}\widehat{\boldsymbol{X}}] &= [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{A}]\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{A}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}] \\ &= \widehat{A}(i\hbar \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}) = i\hbar \widehat{A} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \\ &= i\hbar \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot (\widehat{A}\widehat{\boldsymbol{X}})\end{aligned} \tag{2.70}$$

Analogamente si dimostra anche per l'operatore $\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{A}$. ■

- Se considero due operatori vettoriali $\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ allora il loro prodotto $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}$ è un operatore scalare.

Dimostrazione. Utilizzando l'eq.(2.65)

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}] &= [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{X}}] \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{Y}}] \\ &= (i\hbar \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{X}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot (i\hbar \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}) \\ &= i\hbar \boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}} + i\hbar \boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} \times \widehat{\boldsymbol{X}} = 0\end{aligned} \tag{2.71}$$

Per cui in virtù dell'eq.(2.56) $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}$ è uno scalare. ■

- Se considero due operatori vettoriali $\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ allora il loro prodotto $\widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}$ è un operatore vettoriale.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}] &= [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{X}}] \cdot \boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{Y}}] \\
&= -i\hbar \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}) + i\hbar \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{X}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} \\
&= i\hbar((\boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{X}}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}) - (\boldsymbol{b} \times \widehat{\boldsymbol{X}}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{Y}})) \\
&= i\hbar(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}) \\
&= i\hbar \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot (\widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}})
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Confrontando con (2.65), posso concludere che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}$ è vettoriale. ■

2.2.3 Gli operatori diadici simmetrici a traccia nulla

Definizione. Una *diade* simmetrica e a traccia nulla è una matrice 3×3 che soddisfa le seguenti proprietà

$$\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{Q} \qquad \text{cioè} \qquad Q_{ij} = Q_{ji} \tag{2.73}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \sum_k Q_{kk} = 0 \tag{2.74}$$

Definizione. Si dice che un osservabile è una diade antisimmetrica e a traccia nulla se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$ la probabilità associata alla misura di $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R}^t$ in s è la stessa associata alla misura di $\boldsymbol{Q}$ nello stato ${}^{\boldsymbol{R}}s$, cioè

$$\langle \boldsymbol{Q} \rangle_{\boldsymbol{R}_s} = \boldsymbol{R} \cdot \langle \boldsymbol{Q} \rangle_s \cdot \boldsymbol{R}^t \tag{2.75}$$

In termini formali l'osservabile è espresso dall'operatore $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ per cui l'equazione precedente si traduce in

$$\left\langle {}^{\boldsymbol{R}}\psi \middle| \widehat{\boldsymbol{Q}} \middle| {}^{\boldsymbol{R}}\psi \right\rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \widehat{\boldsymbol{Q}} | \psi \rangle \cdot \boldsymbol{R}^t \tag{2.76}$$

Operatori di questo tipo sono detti *operatori diadici simmetrici a traccia nulla.* A livello operatoriale le eq.(2.73) e (2.74) si traducono in

$$\widehat{\boldsymbol{Q}}^t = \widehat{\boldsymbol{Q}} \qquad\qquad \mathrm{tr}\Big(\widehat{\boldsymbol{Q}}\Big) = 0 \tag{2.77}$$

Utilizzando la definizione (2.19), l'eq.(2.76) equivale a richiedere che

$$\widehat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger \widehat{\boldsymbol{Q}} \widehat{U}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{R}^t \tag{2.78}$$

Osservazione. Il motivo per cui si specifica che la diade considerata sia simmetrica e a traccia nulla si basa sul fatto che una qualsiasi diade $\boldsymbol{A}$ (e di conseguenza ogni operatore diadico) possa essere scomposta nella forma

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{S,TL} + \boldsymbol{A}^A + a\mathbf{1} \tag{2.79}$$

cioè come somma di una diade simmetrica e a traccia nulla, una antisimmetrica e un multiplo dell'identità.

Dimostrazione. Indicando gli elementi della diade come A_{ij}, posso aggiungere e togliere gli stessi termini ottenendo

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(A)\delta_{ij} + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) + \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(A)\delta_{ij} \tag{2.80}$$

riconoscendo che il primo termine è simmetrico e senza traccia, il secondo antisimmetrico e l'ultimo è un multiplo dell'identità, dove la costante di proporzionalità è data da $\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(A)$ ■

Analizzando i vari termini, si può notare che una diade antisimmetrica ha 3 parametri liberi, per cui è completamente definita da un vettore tridimensionale: questo è il motivo per cui era stata indicata con il simbolo $*\boldsymbol{a}$, dove $\boldsymbol{a}$ è un vettore generico (vedi eq.(2.16)): ciò significa che una diade antisimmetrica ricade nel caso già trattato di operatori vettoriali. Allo stesso modo un multiplo della matrice identità ha un solo parametro libero: questo implica che l'operatore si comporta come un operatore scalare, già trattato precedentemente. Per cui il primo termine della somma, la parte simmetrica senza traccia, rappresenta la vera novità delle diadi, che non può essere ricondotta ad un caso già analizzato in precedenza.

Se considero i vettori generici $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, vale la seguente legge di commutazione

$$[\boldsymbol{a}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c}] = i\hbar(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) \tag{2.81}$$

Dimostrazione. Utilizzando le eq.(2.27) e (2.17) per le rotazioni infinitesime, posso valutare i due membri dell'equazione (2.78)

- I membro

$$\begin{aligned}
&\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n}))^\dagger\cdot\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\widehat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\boldsymbol{n}))\\
&\qquad= (\widehat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}})\cdot\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c}\cdot(\widehat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}})\\
&\qquad= \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}) - i\hbar^{-1}\delta\varphi(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c} + O(\delta\varphi^2)\\
&\qquad= \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c} + i\hbar^{-1}\delta\varphi[\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{c}] + O(\delta\varphi^2)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

- II membro

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \boldsymbol{n})^t \cdot \boldsymbol{c} & \\
&= \boldsymbol{b} \cdot (\mathbf{1} - \delta\varphi * \boldsymbol{n}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot (\mathbf{1} + \delta\varphi * \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{c} + O(\delta\varphi^2) \\
&= \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c} + \delta\varphi \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c} - \delta\varphi \boldsymbol{b} \cdot * \boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c} + O(\delta\varphi^2) \\
&= \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c} - \delta\varphi \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c} - \delta\varphi \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} + O(\delta\varphi^2)
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

Eguagliando i due risultati ottenuti

$$
i\hbar^{-1}[\boldsymbol{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \tag{2.84}
$$

da cui segue l'eq. (2.81). ■

Utilizzando questo risultato con $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e_j}$ e $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e_k}$ si ottiene la relazione di commutazione tra le componenti di $\widehat{\boldsymbol{j}}$ e gli elementi di $\widehat{\boldsymbol{Q}}$

$$
[\widehat{j}_i, \widehat{Q}_{jk}] = i\hbar \sum_l (\epsilon_{ijl} \widehat{Q}_{lk} + \epsilon_{ikl} \widehat{Q}_{jl}) \tag{2.85}
$$

Quindi ogni volta che l'eq.(2.78) oppure l'eq.(2.85) viene soddisfatta, si potrà concludere che $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è un operatore diadico simmetrico a traccia nulla.

Verranno elencate ora alcune proprietà degli operatori diadici.

- Si definisce prodotto diadico tra due operatori vettoriali $\widehat{\boldsymbol{X}} = (\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_3)$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}} = (\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}_3)$, l'operatore diadico così definito:

$$
\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \widehat{X}_1\widehat{Y}_1 & \widehat{X}_1\widehat{Y}_2 & \widehat{X}_1\widehat{Y}_3 \\ \widehat{X}_2\widehat{Y}_1 & \widehat{X}_2\widehat{Y}_2 & \widehat{X}_2\widehat{Y}_3 \\ \widehat{X}_3\widehat{Y}_1 & \widehat{X}_3\widehat{Y}_2 & \widehat{X}_3\widehat{Y}_3 \end{bmatrix} \tag{2.86}
$$

A partire da questa definizione posso introdurre il prodotto diadico simmetrizzato a traccia nulla

$$
\widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t\right) - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\mathbf{1}} \tag{2.87}
$$

Il risultato di questa operazione è un operatore diadico simmetrico e a traccia nulla.

Dimostrazione. Inizio dimostrando che l'operatore è simmetrico e a traccia nulla

- Simmetria

$$\begin{aligned}(\widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}})^t &= \frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t)^t - \frac{1}{3}(\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}})^t \\ &= \frac{1}{2}\left((\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^{tt}\right) - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}}^t \\ &= \frac{1}{2}\left((\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t + \widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}}\right) - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}} = \widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}}\end{aligned} \tag{2.88}$$

- Traccia Nulla

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}}\right) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}}\right) + \mathrm{tr}\left((\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t\right)\right] - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\,\mathrm{tr}\left(\widehat{\boldsymbol{1}}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}}\right) - \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} = 0\end{aligned} \tag{2.89}$$

A questo punto calcolo il commutatore

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}} \cdot \boldsymbol{c}] &= \left[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t\right) - \frac{1}{3}(\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}}\right) \cdot \boldsymbol{c}\right] \\ &= \left[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}\right] \\ &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{X}]\boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}]\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}] \\ &\quad - \frac{1}{3}[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}]\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{2.90}$$

Dato che $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}$ è un operatore scalare, l'ultimo commutatore si annulla e così, per la proprietà (2.65) ottengo:

$$\begin{aligned}&\frac{i\hbar}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{c} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}) \\ &\qquad = i\hbar(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\left[\frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t) - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}}\right] \cdot \boldsymbol{c} \\ &\qquad + \boldsymbol{b} \cdot \left[\frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}} + (\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{Y}})^t) - \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}\widehat{\boldsymbol{1}}\right]\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{2.91}$$

confrontando con l'eq.(2.81) posso concludere che l'operatore definito nell'eq.(2.87) è diadico simmetrico e senza traccia. ■

- Se $\widehat{\boldsymbol{R}}$ ed $\widehat{\boldsymbol{S}}$ sono due operatori diadici simmetrici e traccia nulla, allora il loro prodotto scalare $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}$ è un operatore scalare.

Dimostrazione. Innanzi tutto si può osservare che è possibile riscrivere le regole di commutazione in (2.81) nella forma

$$[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{bc} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}}] = i\hbar(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{bc} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{bc} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \times \boldsymbol{a}) \tag{2.92}$$

introducendo la diade $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{bc}$, e ammettendo che essa sia simmetrica, l'equazione precedente diventa

$$[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{A} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}}] = i\hbar(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a}) \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} = 2i\hbar \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \tag{2.93}$$

Ponendo ora $\widehat{\boldsymbol{Q}} = \widehat{\boldsymbol{R}}$, $\widehat{\boldsymbol{S}}$ si ottiene

$$[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}] = [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{R}}] \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} + \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{S}}] = 2i\hbar \widehat{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{a} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} + 2i\hbar \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{S}} = 0 \tag{2.94}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione $\widehat{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{a} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} = -\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{S}}$, dimostrando così l'enunciato. ■

- Se $\widehat{\boldsymbol{R}}$ è un operatore diadico simmetrico a traccia nulla e $\widehat{\boldsymbol{X}}$ un operatore vettoriale, allora i prodotti $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}}$ sono operatori vettoriali.

Dimostrazione. Per dimostrare che l'operatore definito $\widehat{\boldsymbol{V}} = \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}$ è di tipo vettoriale devo mostrare che esso soddisfa le regole di commutazione (2.65) che caratterizzano questi operatori.

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}] &= [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}}] \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot [\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \widehat{\boldsymbol{X}}] \\
&= i\hbar(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{X}}) + i\hbar \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} \qquad (2.95) \\
&= i\hbar \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'uguaglianza

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{a} \times \widehat{\boldsymbol{X}} \qquad (2.96)$$

Allo stesso modo è possibile dimostrare che anche $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{R}}$ è un operatore vettoriale.

■

Capitolo 3

Generalizzazione degli operatori rotazionalmente covarianti

In questo capitolo verranno introdotti gli operatori tensoriali e ne verranno descritte alcune proprietà che poi torneranno utili per mostrare come è possibile generalizzare gli operatori covarianti per rotazione descritti ed analizzati nel capitolo precedente. Inoltre verrà descritto il metodo per estendere al caso tensoriale le operazioni tra questi operatori: il prodotto tra operatore scalare e vettoriale, le operazioni $\cdot, \times, \circ$ tra operatori vettoriali e i prodotti scalari tra due operatori scalari, due vettoriali o due diadici simmetrici a traccia nulla.

3.1 Gli operatori tensoriali

Definizione. Sia $\widehat{\boldsymbol{j}}$ un operatore di momento angolare. Si definisce *operatore tensoriale irriducibile di rango* k con $k = 0, 1, 2, ...$, una collezione di $2k+1$ operatori $\widehat{T}(k, q)$ dove $q = -k, -k+1, ..., k-1, k$ tali che

$$[\widehat{j}_0, \widehat{T}(k, q)] = \hbar q \widehat{T}(k, q) \tag{3.1}$$

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}(k, q)] = \hbar (k(k+1) - q(q \pm 1))^{1/2} \widehat{T}(k, q \pm 1) \tag{3.2}$$

dove $\widehat{j}_0$ e $\widehat{j}_{\pm 1}$ rappresentano le componenti dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ rispetto ad una base sferica, definite in (1.27). Si definisce *aggiunto* di un operatore tensoriale, l'operatore

$$\widehat{T}^*(k,q) = (-1)^{k-q}\widehat{T}(k,-q)^\dagger \tag{3.3}$$

il quale è sempre un operatore tensoriale di rango k.

Dimostrazione. Utilizzando la definizione (3.3) e la proprietà (3.1)

$$\begin{aligned}
[\widehat{j}_0, \widehat{T}^*(k,q)] &= [\widehat{j}_0, (-1)^{k-q}\widehat{T}(k,-q)^\dagger] \\
&= -(-1)^{k-q}[\widehat{j}_0, \widehat{T}(k,-q)]^\dagger \\
&= -(-1)^{k-q}\hbar(-q)\widehat{T}(k,-q)^\dagger = \hbar q \widehat{T}^*(k,q)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

per cui soddisfa l'eq.(3.1). Si può dimostrare che esso soddisfa anche l'eq.(3.2):

$$\begin{aligned}
[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}^*(k,q)] &= [\widehat{j}_{\pm 1}, (-1)^{k-q}\widehat{T}(k,-q)^\dagger] \\
&= -(-1)^{k-q}[\widehat{j}_{\mp 1}, \widehat{T}(k,-q)]^\dagger \\
&= (-1)^{k-q\mp 1}\hbar(k(k+1) + q(-q\mp 1))^{1/2}\widehat{T}(k,-q\mp 1)^\dagger \\
&= \hbar(k(k+1) - q(q\pm 1))^{1/2}\widehat{T}^*(k,q\pm 1)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

■

Un operatore tensoriale irriducibile si dice *autoaggiunto* quando

$$\widehat{T}^*(k,q) = \widehat{T}(k,q) \tag{3.6}$$

Utilizzando la definizione (3.3), si può dimostrare che

$$\widehat{T}^{**}(k,q) = \widehat{T}(k,q) \tag{3.7}$$

Considerando due operatori tensoriali $\widehat{T}_1(k_1, q_1)$ e $\widehat{T}_2(k_2, q_2)$ è possibile definire per ogni $|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$, con $q = -k, -k+1, ..., k-1, k$ il loro prodotto tensoriale

$$\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q) = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2) \tag{3.8}$$

dove il termine $\langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle$ è un coefficiente di Clebsch-Gordan. Per ogni valore di k, la k-esima componente del prodotto $\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q)$ è un operatore tensoriale di rango k.

Dimostrazione. Utilizzando la definizione (3.8) è possibile calcolare

$$\begin{aligned}
&[\widehat{j}_0, \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q)] \\
&= \left[\widehat{j}_0, \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2)\right] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, [\widehat{j}_0, \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2)] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, ([\widehat{j}_0, \widehat{T}_1(k_1, q_1)] \widehat{T}_2(k_2, q_2) + \widehat{T}_1(k_1, q_1) [\widehat{j}_0, \widehat{T}_2(k_2, q_2)]) \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, (\hbar q_1 \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2) + \widehat{T}_1(k_1, q_1) \hbar q_2 \widehat{T}_2(k_2, q_2)) \\
&= \hbar \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} (q_1 + q_2) \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2) \\
&= \hbar \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, q \widehat{T}_1(k_1, q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2) \\
&= \hbar q \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

quindi l'operatore $\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q)$ soddisfa l'eq.(3.1).

A questo punto utilizzando l'eq.(3.2) e la proprietà (1.74) è possibile calcolare

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{j}_{\pm 1},\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q)] \\
&\quad = \left[\widehat{j}_{\pm 1}, \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q\rangle\, \widehat{T}_1(k_1,q_1)\widehat{T}_2(k_2,q_2)\right] \\
&\quad = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q\rangle\, [\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}_1(k_1,q_1)\widehat{T}_2(k_2,q_2)] \\
&\quad = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q\rangle \\
&\qquad\quad \times ([\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}_1(k_1,q_1)]\widehat{T}_2(k_2,q_2) + \widehat{T}_1(k_1,q_1)[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}_2(k_2,q_2)]) \\
&\quad = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q\rangle \\
&\qquad\quad \times [\hbar(k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \pm 1))^{1/2}\widehat{T}_1(k_1, q_1 \pm 1)\widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&\qquad\qquad + \widehat{T}_1(k_1,q_1)\hbar(k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \pm 1))^{1/2}\widehat{T}_2(k_2, q_2 \pm 1)] \\
&\quad = \hbar \sum_{q_1=-k_1\pm 1}^{k_1\pm 1} \sum_{q_2=-k_2\pm 1}^{k_2\pm 1} [(k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \mp 1))^{1/2}\, \langle k_1, k_2, q_1 \mp 1, q_2 | k, q\rangle \\
&\qquad\quad + (k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \mp 1))^{1/2}\, \langle k_1, k_2, q_1, q_2 \mp 1 | k, q\rangle]\widehat{T}_1(k_1,q_1)\widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&\quad = \hbar \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \pm 1\rangle\, (k(k+1) - q(q \pm 1))^{1/2}\widehat{T}_1(k_1,q_1)\widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&\quad = \hbar(k(k+1) - q(q \pm 1))^{1/2}\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k, q \pm 1)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Nel terzultimo passaggio è stato effettuato uno shift degli indici $q_1 \leftrightarrow q_1 \mp 1$ e $q_2 \leftrightarrow q_2 \mp 1$: questo è stato possibile perchè così facendo si sono aggiunti solo termini nulli alla somma in virtù delle regole di selezione dei coefficienti di Clebsch-Gordan (1.70) e (1.71) . ■

Vale la relazione:

$$(\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2)^*(k,q) = \widehat{T}_2^{\,*} \otimes \widehat{T}_1^{\,*}(k,q) \tag{3.11}$$

Dimostrazione. Per la def.(3.3)

$$
\begin{aligned}
(\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2)^*(k,q) &= (-1)^{k-q} (\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2)(k,-q)^\dagger \\
&= (-1)^{k-q} \left(\sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, -q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \right)^\dagger \\
&= (-1)^{k-q} \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, -q_1, -q_2 | k, -q \rangle \, \widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger \widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= (-1)^{k-q} \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-k} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \qquad (3.12) \\
&\quad \times \widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger \widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, (-1)^{k_2-q_2} \widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger \\
&\quad \times (-1)^{k_1-q_1} \widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= \widehat{T}_2^{\,*} \otimes \widehat{T}_1^{\,*}(k,q)
\end{aligned}
$$

dove si è fatto uso della proprietà di simmetria dei coefficienti di Clebasch-Gordan $\langle k_1, k_2, -q_1, -q_2 | k, -q \rangle = (-1)^{k_1+k_2-k} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle$. ■

Considerando due operatori con lo stesso rango $\widehat{T}_1(k,q)$ e $\widehat{T}_2(k,q)$, si può definire il prodotto scalare tra di essi come l'operatore

$$
\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 = \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^{\,*}(0,0) \qquad (3.13)
$$

Esplicitamente può essere espresso

$$
\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 = \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k,q) \widehat{T}_2(k,q)^\dagger \qquad (3.14)
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
&\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^{\,*}(0,0) \\
&\quad = \sum_{q_1=-k}^{k} \sum_{q_2=-k}^{k} \langle k, k, q_1, q_2 | 0, 0 \rangle \, \widehat{T}_1(k, q_1)(-1)^{k-q_2} \widehat{T}_2(k, -q_2)^\dagger
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

A questo punto utilizzando la proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan

$$
\langle k, k, q_1, q_2 | 0, 0 \rangle = \frac{\delta_{q_1+q_2,0}(-1)^{k-q_1}}{(2k+1)^{1/2}}
\tag{3.16}
$$

si ricava

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{q_1=-k}^{k} \sum_{q_2=-k}^{k} \frac{\delta_{q_1+q_2,0}(-1)^{k-q_1}}{(2k+1)^{1/2}} \widehat{T}_1(k, q_1)(-1)^{k-q_2} \widehat{T}_2(k, -q_2)^\dagger \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k, q) \widehat{T}_2(k, q)^\dagger
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

■

Inoltre si può osservare che

$$
(\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2)^\dagger = \widehat{T}_2 \bullet \widehat{T}_1
\tag{3.18}
$$

Dimostrazione. Utilizzando il risultato (3.14) posso calcolare

$$
\begin{aligned}
(\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2)^\dagger &= \left(\frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k, q) \widehat{T}_2(k, q)^\dagger \right)^\dagger \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_2(k, q) \widehat{T}_1(k, q)^\dagger = \widehat{T}_2 \bullet \widehat{T}_1
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

■

3.2 Il legame tra operatori covarianti per rotazione ed operatori tensoriali

Gli operatori scalari

Per un generico operatore scalare $\widehat{A}$ è possibile riscrivere la relazione (2.56) esprimendo le componenti dell'operatore $\widehat{\boldsymbol{j}}$ su una base sferica (vedi (1.27)), per cui si ottiene

$$[\widehat{j}_0, \widehat{A}] = 0 \tag{3.20}$$

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{A}] = 0 \tag{3.21}$$

Allo stesso modo per un generico operatore tensoriale $\widehat{A}(0,0)$ di rango 0, per le relazioni (3.1) e (3.2), si può scrivere

$$[\widehat{j}_0, \widehat{A}(0,0)] = 0 \tag{3.22}$$

$$[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{A}(0,0)] = 0 \tag{3.23}$$

La proprietà di autoaggiunzione (3.6) si traduce in

$$\widehat{A}(0,0)^\dagger = \widehat{A}(0,0) \tag{3.24}$$

per cui l'operatore tensoriale è autoaggiunto nel senso ordinario.

Utilizzando questi risultati si può dire che un operatore $\widehat{A}$ è uno scalare se e solo se l'operatore

$$\widehat{A}(0,0) = \widehat{A} \tag{3.25}$$

è un operatore tensoriale di rango 0. Inoltre $\widehat{A}$ è autoaggiunto solo quando $\widehat{A}(0,0)$ lo è, come specificato precedentemente.

Dimostrazione. È banale osservare che se l'equazione (3.25) è vera, allora le relazioni (3.20)-(3.21) e (3.22)-(3.23) sono equivalenti. Avendo dimostrato questa relazione, la proprietà di autoaggiunzione discende in modo naturale. ■

Gli operatori vettoriali

Per un operatore vettoriale $\widehat{\boldsymbol{V}}$ posso introdurre le componenti espresse rispetto ad una base sferica:

$$\widehat{V}_0 = \widehat{V}_3 \tag{3.26}$$

$$\widehat{V}_{\pm 1} = \widehat{V}_1 \pm i\widehat{V}_2 \tag{3.27}$$

Utilizzando queste relazioni, posso riscrivere la legge di commutazione propria degli operatori vettoriali, espressa nell'equazione (2.69)

$$\begin{aligned}
&[\widehat{j}_0, \widehat{V}_0] = 0 \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{V}_{\pm 1}] = \pm\hbar\widehat{V}_{\pm 1} \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}_0] = \mp\hbar\widehat{V}_{\pm 1} \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}_{\pm 1}] = 0 \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}_{\mp 1}] = \pm 2\hbar\widehat{V}_0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dimostrazione. Considerando la base sferica associata alla base ortonormale orientata $\boldsymbol{e_i}$, utilizzando l'equazione (2.65) si ottiene

$$\begin{aligned}
[\widehat{j}_\alpha, \widehat{V}_\beta] &= [\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}] = i\hbar \boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{V}} \\
&= \hbar(\delta_{\alpha 0}\beta \boldsymbol{e}_\beta - \delta_{\beta 0}\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \delta_{-\alpha\beta}(\alpha - \beta)\boldsymbol{e}_0) \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sostituendo nell'equazione trovata i diversi valori di $\alpha, \beta = 0, \pm 1$ si trovano le relazioni (3.28) ■

L'operatore vettoriale $\widehat{\boldsymbol{V}}$ è autoaggiunto quando

$$\widehat{V}_0^\dagger = \widehat{V}_0 \tag{3.30}$$

$$\widehat{V}_{\pm 1}^{\dagger} = \widehat{V}_{\mp 1} \tag{3.31}$$

Dimostrazione. L'operatore è autoaggiunto quando le sue componenti espresse rispetto ad una base orientata ortogonale soddisfano $\widehat{V}_i^{\dagger} = \widehat{V}_i$. Utilizzando le relazioni (3.26) e (3.27) si ottiene

$$\begin{aligned} &\widehat{V}_0^{\dagger} = \widehat{V}_3^{\dagger} = \widehat{V}_3 = \widehat{V}_0 \\ &\widehat{V}_{\pm 1}^{\dagger} = (\widehat{V}_1 \pm i\widehat{V}_2)^{\dagger} = \widehat{V}_1^{\dagger} \mp i\widehat{V}_2^{\dagger} = \widehat{V}_1 \mp i\widehat{V}_2 = \widehat{V}_{\mp 1} \end{aligned} \tag{3.32}$$

■

Utilizzando le definizioni (3.1) e (3.2), $\widehat{V}(1,q)$ con $q = 0, \pm 1$ è un operatore tensoriale di rango 1 se soddisfa

$$\begin{aligned} &[\widehat{j}_0, \widehat{V}(1,0)] = 0 \\ &[\widehat{j}_0, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \pm\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,0)] = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\pm 1)] = 0 \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\mp 1)] = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,0) \end{aligned} \tag{3.33}$$

La proprietà di autoaggiunzione (3.6) si traduce in

$$\begin{aligned} &\widehat{V}(1,0)^{\dagger} = -\widehat{V}(1,0) \\ &\widehat{V}(1,\pm 1)^{\dagger} = \widehat{V}(1,\mp 1) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Per cui $\widehat{\boldsymbol{V}}$ è un operatore vettoriale se e solo se gli operatori

$$\widehat{V}(1,0) = i\widehat{V}_0 \tag{3.35}$$

$$\widehat{V}(1,\pm 1) = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\widehat{V}_{\pm 1} \tag{3.36}$$

costituiscono un operatore tensoriale di rango 1.

Se le relazioni precedenti sono soddisfatte, allora l'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}$ è autoaggiunto solo quando $\widehat{V}(1,q)$ lo è, nel senso tensoriale descritto in precedenza.

Dimostrazione. Si ipotizzi che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}$ sia un operatore vettoriale, per cui valgono le relazioni di commutazione (3.26) e (3.27). Allora, l'operatore tensoriale di rango 1 definito da (3.35) e (3.36) soddisfa le regole di commutazione

$$\begin{aligned}
&[\widehat{j}_0, \widehat{V}(1,0)] = i[\widehat{j}_0, \widehat{V}_0] = 0 \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \frac{\mp i}{2^{1/2}}[\widehat{j}_0, \widehat{V}_{\pm 1}] = \frac{\mp \hbar i}{2^{1/2}}\widehat{V}_{\pm 1} = \pm\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,0)] = \mp i\hbar\widehat{V}_{\pm 1} = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \frac{\mp i}{2^{1/2}}[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}_{\pm 1}] = 0 \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\mp 1)] = \frac{\pm i}{2^{1/2}}[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}_{\mp 1}] = 2^{1/2}i\hbar\widehat{V}_0 = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,0)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

L'operatore tensoriale $\widehat{V}(1,q)$ così definito soddisfa le relazioni di (3.33) ed è quindi un operatore tensoriale di rango 1. Con un procedimento analogo è possibile dimostrare che partendo dall'ipotesi che $\widehat{V}(1,q)$ sia un operatore tensoriale di rango 1 e che quindi soddisfi le relazioni (3.33), gli operatori $\widehat{V}_0$ e $\widehat{V}_{\pm 1}$, definiti nelle eq.(3.35) e (3.36) sono le componenti di un operatore vettoriale $\widehat{\boldsymbol{V}}$ espresse rispetto ad una base sferica. Si è dimostrata in questo modo la relazione biunivoca tra operatori vettoriali e tensoriali di rango 1.

A questo punto, supponendo che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}$ sia autoaggiunto, cioè che le sue componenti sferiche soddifino le equazioni (3.30) e (3.31), con la definizione (3.3) posso calcolare

$$\begin{aligned}
&\widehat{V}^*(1,0) = -\widehat{V}(1,0)^\dagger = -(i\widehat{V}_0)^\dagger = i\widehat{V}_0 = \widehat{V}(1,0) \\
&\widehat{V}^*(1,\pm 1) = \widehat{V}(1,\mp 1)^\dagger = \left(\frac{\pm i}{2^{1/2}}\widehat{V}_{\mp 1}\right)^\dagger = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\widehat{V}_{\pm 1} = \widehat{V}(1,\pm 1)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Per cui l'operatore $\widehat{V}(1, q)$ soddisfa le relazioni di autoaggiunzione mostrate nell'eq.(3.34) Allo stesso modo è possibile dimostrare l'implicazione inversa: se l'operatore tensoriale di rango 1 è autoaggiunto nel senso espresso da (3.34), allora le componenti sferiche dell'operatore vettoriale soddisfano le relazioni (3.30) e (3.31) e quindi l'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}$ è autoaggiunto. ■

Gli operatori diadici simmetrici a traccia nulla

È possibile calcolare gli elementi di una diade simmetrica a traccia nulla esprimendone le componenti rispetto ad una base sferica:

$$\begin{aligned} &\widehat{Q}_{00} = \widehat{Q}_{33} \\ &\widehat{Q}_{\pm 10} = \widehat{Q}_{13} \pm i\widehat{Q}_{23} \\ &\widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1} = \widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \pm 2i\widehat{Q}_{12} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Le restanti componenti possono essere dedotte grazie alle proprietà di simmetria e annullamento della traccia: $\widehat{Q}_{0\pm 1} = \widehat{Q}_{31} \pm i\widehat{Q}_{32} = \widehat{Q}_{13} \pm i\widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{\pm 10}$ e anche $\widehat{Q}_{\pm 1 \mp 1} = \widehat{Q}_{11} + \widehat{Q}_{22} = -\widehat{Q}_{33} = -\widehat{Q}_{00}$. È quindi possibile riscrivere le leggi di commutazione (2.85) in coordinate sferiche, che diventano

$$\begin{aligned} &[\widehat{j}_0, \widehat{Q}_{00}] = 0 \\ &[\widehat{j}_0, \widehat{Q}_{\pm 10}] = \pm\hbar\widehat{Q}_{\pm 10} \\ &[\widehat{j}_0, \widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1}] = \pm 2\hbar\widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1} \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{00}] = \mp 2\hbar\widehat{Q}_{\pm 10} \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{\pm 10}] = \mp\hbar\widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1} \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{\mp 10}] = \mp 3\hbar\widehat{Q}_{\pm 1 \mp 1} \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1}] = 0 \\ &[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{\mp 1 \mp 1}] = \pm 4\hbar\widehat{Q}_{\mp 10} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dimostrazione. Si consideri una base sferica $\boldsymbol{e}_\alpha$ associata alla base ortonormale orientata $\boldsymbol{e}_i$. Allora per l'eq.(2.81) posso scrivere

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{e}_\gamma] &= i\hbar(\boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{e}_\gamma + \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}_\gamma) \\ &= \hbar[(\delta_{\alpha 0}\beta \boldsymbol{e}_\beta - \delta_{\beta 0}\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \delta_{-\alpha\beta}(\alpha-\beta)\boldsymbol{e}_0) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{e}_\gamma + \\ &\quad \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot (\delta_{\alpha 0}\gamma \boldsymbol{e}_\gamma - \delta_{\gamma 0}\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \delta_{-\alpha\gamma}(\alpha-\gamma)\boldsymbol{e}_0)]\end{aligned} \tag{3.41}$$

A questo punto, tenendo condo del fatto che $\widehat{j}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}$ e $\widehat{Q}_{\beta\gamma} = \boldsymbol{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{e}_\gamma$ si può valutare

$$\begin{aligned}[\widehat{j}_\alpha, \widehat{Q}_{\beta\gamma}] &= \hbar[\delta_{\alpha 0}(\beta+\gamma)\widehat{Q}_{\beta\gamma} - \delta_{\beta 0}\alpha \widehat{Q}_{\alpha\gamma} - \\ &\quad \delta_{\gamma 0}\alpha \widehat{Q}_{\beta\alpha} + \delta_{-\alpha\beta}(\alpha-\beta)\widehat{Q}_{0\gamma} + \delta_{-\alpha\gamma}(\alpha-\gamma)\widehat{Q}_{\beta 0}]\end{aligned} \tag{3.42}$$

Utilizzando questo risultato e variando i possibili valori $\alpha, \beta, \gamma = 0, \pm 1$ si dimostrano le relazioni (3.40) ■

In termini di componenti sferiche, un operatore diadico simmetrico a traccia nulla è autoaggiunto quando

$$\widehat{Q}_{00}{}^\dagger = \widehat{Q}_{00} \tag{3.43}$$

$$\widehat{Q}_{\pm 10}{}^\dagger = \widehat{Q}_{\mp 10} \tag{3.44}$$

$$\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1}{}^\dagger = \widehat{Q}_{\mp 1\mp 1} \tag{3.45}$$

Dimostrazione. Se l'operatore diadico è autoaggiunto, significa che le sue componenti espresse rispetto ad una base ortogonale soddifano $\widehat{Q}_{ij}{}^\dagger = \widehat{Q}_{ij}$. Quindi, utilizzando le relazioni (3.39)

$$\begin{aligned}&\widehat{Q}_{00}{}^\dagger = \widehat{Q}_{33}{}^\dagger = \widehat{Q}_{33} = \widehat{Q}_{00} \\ &\widehat{Q}_{\pm 10}{}^\dagger = (\widehat{Q}_{13} \pm i\widehat{Q}_{23})^\dagger = \widehat{Q}_{13}{}^\dagger \mp i\widehat{Q}_{23}{}^\dagger = \widehat{Q}_{13} \mp i\widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{\mp 10} \\ &\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1}{}^\dagger = (\widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \pm 2i\widehat{Q}_{12})^\dagger = \widehat{Q}_{11}{}^\dagger - \widehat{Q}_{22}{}^\dagger \mp 2i\widehat{Q}_{12}{}^\dagger = \widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \mp 2i\widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{\mp 1\mp 1}\end{aligned} \tag{3.46}$$

$\blacksquare$

Se si introduce l'operatore tensoriale $\widehat{Q}(2,q)$ con $q = 0, \pm 1, \pm 2$ di rango 2, per le definizioni (3.1) e (3.2) le leggi di commutazione che le sue componenti soddisfano sono

$$\begin{aligned}
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,0)] = 0 \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm 1)] = \pm\hbar\widehat{Q}(2,\pm 1) \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm 2)] = \pm 2\hbar\widehat{Q}(2,\pm 2) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,0)] = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,\pm 1) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\pm 1)] = 2\hbar\widehat{Q}(2,\pm 2) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 1)] = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,0) \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\pm 2)] = 0 \\
&[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 2)] = 2\hbar\widehat{Q}(1,\mp 1)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

La proprietà di autoaggiunzione (3.6) si traduce in

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}(2,0)^\dagger &= \widehat{Q}(2,0) \\
\widehat{Q}(2,\pm 1)^\dagger &= -\widehat{Q}(2,\mp 1) \\
\widehat{Q}(2,\pm 2)^\dagger &= \widehat{Q}(2,\mp 2)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Per cui si dirà che $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è un operatore diadico simmetrico e a traccia nulla se e solo se gli operatori

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}(2,0) &= -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00} \\
\widehat{Q}(2,\pm 1) &= \pm\widehat{Q}_{\pm 10} \\
\widehat{Q}(2,\pm 2) &= -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

costituiscono un operatore tensoriale di rango 2. Se questo viene soddisfatto, allora l'operatore $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è autoaggiunto solo quando $\widehat{Q}(2,q)$ lo è nel senso tensoriale appena descritto.

Dimostrazione. Si supponga che l'operatore $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ sia diadico simmetrico e a traccia nulla, ne segue che le sue componenti sferiche soddisfano le relazioni (3.39). Per cui se si considera l'operatore tensoriale di rango 2 definito in (3.49), esso soddisfa le leggi di commutazione

$$\begin{aligned}
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,0)] = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}[\widehat{j}_0, \widehat{Q}_{00}] = 0 \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm1)] = \pm[\widehat{j}_0, \widehat{Q}_{\pm10}] = \hbar\widehat{Q}_{\pm10} = \pm\hbar\widehat{Q}(2,\pm1) \\
&[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm2)] = -\frac{1}{2}[\widehat{j}_0, \widehat{Q}(\pm1,\pm1)] = \mp\hbar\widehat{Q}_{\pm1\pm1} = \pm2\hbar\widehat{Q}(2,\pm2) \\
&[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,0)] = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{00}] = \pm2\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\hbar\widehat{Q}_{\pm10} = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,\pm1) \\
&[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,\pm1)] = \pm[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\pm10}] = -\hbar\widehat{Q}_{\pm1\pm1=}2\hbar\widehat{Q}(2,\pm2) \\
&[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,\mp1)] = \mp[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\mp10}] = -3\hbar\widehat{Q}_{00} = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,0) \\
&[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,\pm2)] = -\frac{1}{2}[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\pm1\pm1}] = 0 \\
&[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,\mp2)] = -\frac{1}{2}[\widehat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\mp1\mp1}] = \mp2\hbar\widehat{Q}_{\mp10} = 2\hbar\widehat{Q}(1,\mp1)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Si può vedere così che l'operatore soddisfa le leggi di commutazione (3.47) e rappresenta quindi un operatore tensoriale di rango 2. Con un procedimento del tutto analogo è possibile dimostrare l'implicazione inversa, cioè che se si considera un operatore tensoriale che soddisfi le leggi di commutazione (3.47), allora gli operatori definiti in (3.49) soddisfano le relazioni (3.40) e sono quindi le componenti sferiche di un operatore vettoriale.

Supponendo ora che l'operatore diadico simmetrico a traccia nulla $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ sia autoaggiunto: questo implica che le sue componenti sferiche soddisfano le relazioni (3.46). A questo punto utilizzando la definizione (3.3)

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}(2,0)^\dagger = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00}{}^\dagger = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00} = \widehat{Q}(2,0) \\
&-\widehat{Q}(2,\mp1)^\dagger = \pm\widehat{Q}_{\mp10}{}^\dagger = \pm\widehat{Q}_{\pm10} = \widehat{Q}(2,\pm1) \\
&\widehat{Q}(2,\mp2)^\dagger = -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\mp1\mp1}{}^\dagger = -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\pm1\pm1} = \widehat{Q}(2,\pm2)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Questo implica che anche le componenti dell'operatore tensoriale sono autoaggiunte, come espresso dalla relazione (3.48). Con lo stesso ragionamento si dimostra l'implicazione inversa, assumendo cioè che l'operatore tensoriale di rango 2 sia autoaggiunto nel senso espresso dalla (3.48), allora le componenti definite da (3.49) soddisfano le regole di commutazione (3.46): questo significa che anche l'operatore diadico $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è autoaggiunto. ■

In virtù della relazione tra operatori rotazionalmente covarianti e operatori tensoriali è possibile generalizzare tutte le operazioni tra di essi descritte nel capitolo precedente.

- Siano $\widehat{A}$ e $\widehat{\boldsymbol{V}}$ un operatore scalare e vettoriale rispettivamente e $\widehat{A}(0,0)$ e $\widehat{V}(1,q)$ i rispettivi operatori tensoriali di rango 0 e 1. Allora

$$\widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,q) = (\widehat{A}\widehat{V})(1,q) \tag{3.52}$$

$$\widehat{V} \otimes \widehat{A}(1,q) = (\widehat{V}\widehat{A})(1,q) \tag{3.53}$$

sono gli operatori tensoriali di rango 1 associati al prodotto $\widehat{A}\widehat{\boldsymbol{V}}$ e $\widehat{\boldsymbol{V}}\widehat{A}$.

Dimostrazione. Come dimostrato nel capitolo precedente, i prodotti $\widehat{A}\widehat{\boldsymbol{V}}$ e $\widehat{\boldsymbol{V}}\widehat{A}$ rappresentano operatori vettoriali.Considero il prodotto $\widehat{A}\widehat{\boldsymbol{V}}$: le sue componenti espresse rispetto ad una base sferica sono

$$\begin{aligned} (\widehat{A}\widehat{V})_0 &= \widehat{A}\widehat{V}_0 \\ (\widehat{A}\widehat{V})_{\pm 1} &= \widehat{A}\widehat{V}_{\pm 1} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Per le definizioni (3.35) e (3.36), gli operatori che costituiscono l'operatore tensoriale ad esso associato sono

$$\begin{aligned} (\widehat{A}\widehat{V})(1,0) &= i\widehat{A}\widehat{V}_0 \\ (\widehat{A}\widehat{V})(1,\pm 1) &= \frac{\mp i}{2^{1/2}}\widehat{A}\widehat{V}_{\pm 1} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Utilizzando la definizione (3.8) posso calcolare

$$\widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,q) = \sum_{q'=-1}^{1} \langle 0,1,0,q'|1,q\rangle \, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,q') \tag{3.56}$$

Esplicitandone le componenti

$$\widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,0) = \langle 0,1,0,0|1,0\rangle \, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,0) = \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,0) \tag{3.57}$$

$$\widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,\pm 1) = \langle 0,1,0,\pm 1|1,\pm 1\rangle \, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,\pm 1) = \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,\pm 1) \tag{3.58}$$

A questo punto, esprimendo $\widehat{A}(0,0)$ e $\widehat{V}(1,q)$ con le relazioni (3.25) e (3.35)-(3.36) si ricava

$$\begin{aligned} \widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,0) &= i\widehat{A}\widehat{V}_0 \\ \widehat{A} \otimes \widehat{V}(1,\pm 1) &= \frac{\mp i}{2^{1/2}}\widehat{A}\widehat{V}_{\pm 1} \end{aligned} \tag{3.59}$$

confrontando i risultati ottenuti, si dimostra quanto asserito. Con lo stesso procedimento si dimostra la stessa relazione anche per l'operatore $\widehat{\boldsymbol{V}}\widehat{A}$. ■

- Se si considerano due operatori vettoriali $\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ e i relativi operatori tensoriali di rango 1 $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$, si ottengono le seguenti relazioni

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(0,0) = \frac{1}{3^{1/2}}(\widehat{X} \cdot \widehat{Y})(0,0) \tag{3.60}$$

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,q) = -\frac{1}{2^{1/2}}(\widehat{X} \times \widehat{Y})(1,q) \tag{3.61}$$

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,q) = (\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,q) \tag{3.62}$$

dove nei membri di destra compaiono gli operatori tensoriali di rango 0, 1 e 2 associati ai prodotti $\widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}$, $\widehat{\boldsymbol{X}} \times \widehat{\boldsymbol{Y}}$ e $\widehat{\boldsymbol{X}} \circ \widehat{\boldsymbol{Y}}$.

Dimostrazione. Come dimostrato precedentemente, il prodotto $\widehat{\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}}$ è un operatore scalare ed è possibile esprimerlo come combinazione delle componenti sferiche dei due operatori

$$\widehat{\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{2}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}) + \widehat{X}_0\widehat{Y}_0 \tag{3.63}$$

Per quanto dimostrato in questa sezione, è possibile associare a questo prodotto un operatore tensoriale di rango 0

$$(\widehat{X}\cdot\widehat{Y})(0,0) = \frac{1}{2}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}) + \widehat{X}_0\widehat{Y}_0 \tag{3.64}$$

Considerando il prodotto tensoriale definito in (3.8) tra i due operatori di rango 1 $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(0,0) = \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1}\langle 1,1,q_1,q_2|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2) \tag{3.65}$$

più esplicitamente:

$$\begin{aligned}\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(0,0) = {} & \langle 1,1,-1,+1|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1)\\ & + \langle 1,1,+1,-1|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1)\\ & + \langle 1,1,0,0|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)\\ = {} & \frac{1}{3^{1/2}}(\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1) + \widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1) - \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0))\end{aligned} \tag{3.66}$$

Partendo da questo risultato ed esprimendo $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ in termini di $\widehat{X}_0, \widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0\widehat{Y}_{\pm 1}$ utilizzando le relazioni (3.35) e (3.36) si ottiene

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(0,0) = \frac{1}{2\cdot 3^{1/2}}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1} + 2\widehat{X}_0\widehat{Y}_0) \tag{3.67}$$

Confrontando questo risultato con (3.64) si ottiene la relazione (3.60).

Come dimostrato in precedenza il prodotto $\widehat{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}$ tra operatori vettoriali è a sua volta un operatore vettoriale e posso esprimerlo nella forma

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}} = &-\frac{i}{2}(\widehat{X}_0\widehat{Y}_{-1} - \widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_0)\boldsymbol{e}_{+1} \\ &- \frac{i}{2}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} - \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1})\boldsymbol{e}_0 + \frac{i}{2}(\widehat{X}_0\widehat{Y}_{+1} - \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_0)\boldsymbol{e}_{-1}\end{aligned} \tag{3.68}$$

Da questo risultato posso ricavare le componenti sferiche del prodotto

$$(\widehat{X} \times \widehat{Y})_0 = \frac{i}{2}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} - \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}) \tag{3.69}$$

$$(\widehat{X} \times \widehat{Y})_{\pm 1} = \pm i(\widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm 1} - \widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0) \tag{3.70}$$

Utilizzando le relazioni (3.35) e (3.36) si ricavano

$$(\widehat{X} \times \widehat{Y})(1,0) = \frac{1}{2}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} - \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}) \tag{3.71}$$

$$(\widehat{X} \times \widehat{Y})(1,\pm 1) = \frac{1}{2^{1/2}}(\widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm 1} - \widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0) \tag{3.72}$$

A questo punto si può calcolare il prodotto tensoriale

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,q) = \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1} \langle 1,1,q_1,q_2|1,q\rangle\, \widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2) \tag{3.73}$$

o in modo esplicito

$$\begin{aligned}\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,0) &= \langle 1,1,-1,+1|1,0\rangle\, \widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1) \\ &\quad + \langle 1,1,+1,-1|1,0\rangle\, \widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1) \\ &\quad + \langle 1,1,0,0|1,0\rangle\, \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0) \\ &= \frac{1}{2^{1/2}}(-\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1) + \widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1))\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,\pm 1) &= \langle 1,1,\pm 1,0|1,\pm 1\rangle\, \widehat{X}(1,\pm 1)\widehat{Y}(1,0) \\ &\quad + \langle 1,1,0,\pm 1|1,\pm 1\rangle\, \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm 1) \\ &= \frac{\pm 1}{2^{1/2}}(\widehat{X}(1,\pm 1)\widehat{Y}(1,0) - \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm 1))\end{aligned} \tag{3.75}$$

A questo punto, esprimendo $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ in termini di $\widehat{X}_0, \widehat{X}_{\pm 1}, \widehat{Y}_0, \widehat{Y}_{\pm 1}$ per mezzo delle relazioni (3.35) e (3.36) si ottiene

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,0) = -\frac{1}{2^{3/2}}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} - \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}) \tag{3.76}$$

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,\pm 1) = -\frac{1}{2}(\widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm 1} - \widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0) \tag{3.77}$$

Confrontando questo risultato con (3.71)-(3.72) si ottiene la relazione (3.61).

Nel capitolo precedente è stato introdotto il prodotto diadico simmetrizzato senza traccia tra due operatori diadici. Questo prodotto può essere espresso

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{Y}} = &\frac{1}{4}\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{-1}\boldsymbol{e}_{+1}\boldsymbol{e}_{+1} + \frac{1}{4}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_0 + \widehat{X}_0\widehat{Y}_{-1})(\boldsymbol{e}_{+1}\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_{+1}) \\ &+ \frac{1}{6}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1} - 4\widehat{X}_0\widehat{Y}_0)(\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_{+1}\boldsymbol{e}_{-1} + \frac{1}{4}\boldsymbol{e}_{-1}\boldsymbol{e}_{+1} - \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0) \\ &+ \frac{1}{4}(\widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_0 + \widehat{X}_0\widehat{Y}_{+1})(\boldsymbol{e}_{-1}\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_{-1}) + \frac{1}{4}\widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{+1}\boldsymbol{e}_{-1}\boldsymbol{e}_{-1}\end{aligned} \tag{3.78}$$

Da questa relazione posso calcolare

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})_{00} = -\frac{1}{6}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1} - 4\widehat{X}_0\widehat{Y}_0) \tag{3.79}$$

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})_{\pm 10} = \frac{1}{2}(\widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0 + \widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm 1}) \tag{3.80}$$

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})_{\pm 1 \pm 1} = \widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_{\pm 1} \tag{3.81}$$

Da qui, utilizzando le relazioni (3.49) si possono esplicitare gli operatori che compongono l'operatore tensoriale di rango 2 associato al prodotto $\widehat{\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{Y}}$:

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,0) = \frac{1}{2 \cdot 6^{1/2}}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1} + \widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1} - 4\widehat{X}_0\widehat{Y}_0) \tag{3.82}$$

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,\pm 1) = \frac{\pm 1}{2}(\widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_0 + \widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm 1}) \tag{3.83}$$

$$(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,\pm 2) = -\frac{1}{2}\widehat{X}_{\pm 1}\widehat{Y}_{\pm 1} \tag{3.84}$$

A questo punto si può calcolare il prodotto tensoriale

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,q) = \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1} \langle 1,1,q_1,q_2|2,q\rangle\, \widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2) \tag{3.85}$$

o in modo esplicito

$$\begin{aligned}
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,0) &= \langle 1,1,-1,+1|2,0\rangle\,\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1) \\
&\quad + \langle 1,1,+1,-1|2,0\rangle\,\widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1) \\
&\quad + \langle 1,1,0,0|2,0\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0) \\
&= \frac{1}{6^{1/2}}(\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,+1)+\widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,-1) \\
&\quad + 2\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0))
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,\pm1) &= \langle 1,1,\pm1,0|2,\pm1\rangle\,\widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0) \\
&\quad + \langle 1,1,0,\pm1|2,\pm1\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1) \\
&= \frac{\pm1}{2^{1/2}}(\widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0)+\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1))
\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,\pm2) &= \langle 1,1,\pm1,\pm1|2,\pm2\rangle\,\widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,\pm1) \\
&= \widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,\pm1)
\end{aligned} \tag{3.88}$$

A questo punto, esprimendo $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ in termini di $\widehat{X}_0,\widehat{X}_{\pm1},\widehat{Y}_0,\widehat{Y}_{\pm1}$ per mezzo delle relazioni (3.35) e (3.36) si ottiene

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,0) = -\frac{1}{2\cdot 6^{1/2}}(\widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{+1}+\widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{-1}-4\widehat{X}_0\widehat{Y}_0) \tag{3.89}$$

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,\pm1) = \frac{\pm1}{2}(\widehat{X}_{\pm1}\widehat{Y}_0+\widehat{X}_0\widehat{Y}_{\pm1}) \tag{3.90}$$

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(2,\pm2) = -\frac{1}{2}\widehat{X}_{\pm1}\widehat{Y}_{\pm1}) \tag{3.91}$$

Confrontando questo risultato con (3.82)-(3.84) si ottiene la relazione (3.62). ■

- Se si considerano gli operatori $\widehat{A},\widehat{B}$ scalari, $\widehat{\boldsymbol{X}},\widehat{\boldsymbol{Y}}$ vettoriali e $\widehat{\boldsymbol{R}},\widehat{\boldsymbol{S}}$ diadici simmetrici a traccia nulla e i loro rispettivi operatori tensoriali di rango 0, 1 e 2: $\widehat{A}(0,0)$, $\widehat{B}(0,0)$, $\widehat{X}(1,q)$, $\widehat{Y}(1,q)$, $\widehat{R}(2,q)$ e $\widehat{S}(2,q)$, allora

$$\widehat{A}\bullet\widehat{B} = \widehat{A}\widehat{B}^\dagger \tag{3.92}$$

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{3^{1/2}} \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}^{\dagger} \tag{3.93}$$

$$\widehat{R} \bullet \widehat{S} = \frac{1}{5^{1/2}} \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}^{\dagger} \tag{3.94}$$

Dimostrazione. Per le equazioni (3.13) e (3.3) ponendo $k = 0$ si ricava

$$\widehat{A} \bullet \widehat{B} = \widehat{A}(0,0)\widehat{B}(0,0)^{\dagger} \tag{3.95}$$

per la relazione (3.25), segue che

$$\widehat{A} \bullet \widehat{B} = \widehat{A}\widehat{B}^{\dagger} \tag{3.96}$$

l'eq. (3.92) è così dimostrata.

Ora, ponendo $k = 1$ si ottiene

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{3^{1/2}} (\widehat{X}(1,+1)\widehat{Y}(1,+1)^{\dagger} + \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)^{\dagger} + \widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,-1)^{\dagger}) \tag{3.97}$$

per le relazioni (3.35) e (3.36) segue che

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} (\widehat{X}_{+1}\widehat{Y}_{+1}{}^{\dagger} + 2\widehat{X}_0\widehat{Y}_0{}^{\dagger} + \widehat{X}_{-1}\widehat{Y}_{-1}{}^{\dagger}) \tag{3.98}$$

che per le proprietà di autoaggiunzione degli operatori vettoriali diventa

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} (\widehat{X}_{+1}\widehat{Y}^{\dagger}_{-1} + 2\widehat{X}_0\widehat{Y}^{\dagger}_0 + \widehat{X}_{-1}\widehat{Y}^{\dagger}_{-1}) = \frac{1}{3^{1/2}} \widehat{\boldsymbol{X}} \cdot \widehat{\boldsymbol{Y}}^{\dagger} \tag{3.99}$$

l'eq. (3.93) è così dimostrata.

Infine, ponendo $k = 2$ si ottiene

$$\begin{aligned} \widehat{R} \bullet \widehat{S} =& \frac{1}{5^{1/2}} (\widehat{R}(1,+2)\widehat{S}(1,+2)\ ^{\dagger} + \widehat{R}(1,+1)\widehat{S}(1,+1)\ ^{\dagger} \\ & + \widehat{R}(1,0)\widehat{S}(1,0)\ ^{\dagger} + \widehat{R}(1,-1)\widehat{S}(1,-1)\ ^{\dagger} + \widehat{R}(1,-2)\widehat{S}(1,-2)\ ^{\dagger}) \end{aligned} \tag{3.100}$$

Per le relazioni (3.49) segue che

$$\begin{aligned}\widehat{R} \bullet \widehat{S} =& \frac{1}{2^2 \cdot 5^{1/2}} (\widehat{R}_{+1+1} \widehat{S}^{\dagger}_{+1+1} + 4\widehat{R}_{+10} \widehat{S}^{\dagger}_{+10} + 6\widehat{R}_{00} \widehat{S}^{\dagger}_{00} \\ &+ 4\widehat{R}_{-10} \widehat{S}^{\dagger}_{-10} + \widehat{R}_{-1-1} \widehat{S}^{\dagger}_{-1-1})\end{aligned} \tag{3.101}$$

A questo punto, sfruttando le proprietà di autoaggiunzione degli operatori diadici simmetrici a traccia nulla si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{R} \bullet \widehat{S} =& \frac{1}{2^2 \cdot 5^{1/2}} (\widehat{R}_{+1+1} \widehat{S}^{\dagger}_{-1-1} + 4\widehat{R}_{+10} \widehat{S}^{\dagger}_{-10} + 6\widehat{R}_{00} \widehat{S}^{\dagger}_{00} \\ &+ 4\widehat{R}_{-10} \widehat{S}^{\dagger}_{+10} + \widehat{R}_{-1-1} \widehat{S}^{\dagger}_{+1+1}) = \frac{1}{5^{1/2}} \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot\cdot \widehat{\boldsymbol{S}}^{\dagger}\end{aligned} \tag{3.102}$$

l'eq. (3.94) è così dimostrata. ■

Capitolo 4

Il teorema di Wigner-Eckart e le sue applicazioni

Un risultato che discende dalla teoria degli operatori tensoriali, spesso usato in meccanica quantistica è il teorema di Wigner-Eckart.

Sia $\widehat{T}(k,q)$ un operatore tensoriale di rango k rispetto al momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}$ e siano $|a,j,m\rangle$ multipletti di autoket comuni per gli operatori $\widehat{j}^2$ e $\widehat{j}_0$ distinti dai numeri quantici a. Vale la seguente relazione

$$\langle a',j',m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle = \frac{\langle a',j'\|\widehat{T}(k)\|a,j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}}\,\langle j',m'|j,k,m,q\rangle \tag{4.1}$$

dove $\langle j',m'|j,k,m,q\rangle$ è un coefficiente di Clebsch-Gordan e $\langle a',j'\|\widehat{T}(k)\|a,j\rangle$ è detto *elemento di matrice ridotto* dell'operatore tensoriale $\widehat{T}(k,q)$, il quale dipende solo da a,a',j,j' e k.

Questo risultato mostra che la dipendenza del valore $\langle a',j',m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle$ da a,m' e q è completamente determinato dalla simmetria rotazionale del sistema, cioè da un opportuno coefficiente di Clebsch-Gordan.

Dimostrazione. Dalle proprietà (3.1) e (1.43) discende che

$$
\begin{aligned}
&\hbar q \langle a', j', m'|\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle \\
&\qquad = \langle a', j', m'|\,\hbar q\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle = \langle a', j', m'|\,[\widehat{j}_0, \widehat{T}(k,q)]\,|a,j,m\rangle \\
&\qquad = \langle a', j', m'|\,\widehat{j}_0\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle - \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\widehat{j}_0\,|a,j,m\rangle \\
&\qquad = \hbar m' \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle - \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle\,\hbar m
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

per cui

$$
\langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle\,(m+q) = m' \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle \tag{4.3}
$$

Allo stesso modo utilizzando l'eq.(3.2) e la proprietà (1.44) posso calcolare

$$
\begin{aligned}
&\hbar(k(k+1) - q(q\pm 1))^{1/2} \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q\pm 1)\,|a,j,m\rangle \\
&= \langle a', j', m'|\,\hbar(k(k+1) - q(q\pm 1))^{1/2}\widehat{T}(k,q\pm 1)\,|a,j,m\rangle \\
&= \langle a', j', m'|\,[\widehat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}(k,q)]\,|a,j,m\rangle \\
&= \langle a', j', m'|\,\widehat{j}_{\pm 1}\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle - \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\widehat{j}_{\pm 1},\,|a,j,m\rangle \\
&= \hbar(j'(j'+1) - m'(m'\mp 1))^{1/2} \langle a', j', m'\mp 1|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle \\
&\qquad - \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\pm 1\rangle\,\hbar(j(j+1) - m(m\pm 1))^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
&(j'(j'+1) - m'(m'\mp 1))^{1/2} \langle a', j', m'\mp 1|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle \\
&\quad = \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\pm 1\rangle\,(j(j+1) - m(m\pm 1))^{1/2} \\
&\qquad + \langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q\pm 1)\,|a,j,m\rangle\,(k(k+1) - q(q\pm 1))^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Osservando queste relazioni è possibile notare che il valore $\langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle$ soddisfa delle relazioni analoghe a quelle dei coefficienti di Clebsch-Gordan (1.72) e (1.74). Per cui, come per i coefficienti, si può pensare che $\langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle$ sia proporzionale ad un unico valore $\langle a', j', j'|\,\widehat{T}(k,j'-j)\,|a,j,j\rangle$ per mezzo di opportuni fattori moltiplicativi. Rendendo esplicita l'indipendenza da m e m', posso valutare il rapporto:

$$
\frac{\langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a,j,m\rangle}{\langle j', m'|j,k,m,q\rangle} = \frac{\langle a', j', j'|\,\widehat{T}(k,j'-j)\,|a,j,j\rangle}{\langle j', j'|j,k,j,j'-j\rangle} = \frac{\langle a', j'\|\widehat{T}(k)\|a,j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}} \tag{4.6}
$$

ed è così dimostrato il teorema (4.1). ■

Ne segue che, in virtù delle regole di selezione valide per i coefficienti di Clebsch-Gordan, l'elemento di matrice $\langle a', j', m'|\,\widehat{T}(k,q)\,|a, j, m\rangle$ sarà nullo quando non viene soddisfatta la relazione

$$|j - j'| \leq k \leq j + j' \tag{4.7}$$

o la relazione

$$q = m' - m \tag{4.8}$$

Dal teorema di Wigner-Eckart discende una semplice espressione per gli elementi di matrice del prodotto scalare tra tensori di rango k, $\widehat{T}_1(k,q)$ e $\widehat{T}_2(k,q)$, definito in (3.13) rispetto ad una base ortonormale $|a, j, m\rangle$ di autoket comuni per gli operatori $\widehat{j}^2$ e $\widehat{j}_0$:

$$\langle a', j', m'|\,\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2\,|a, j, m\rangle = \frac{\langle a', j\|T_1 \bullet T_2\|a, j\rangle}{(2j+1)^{1/2}}\delta_{j',j}\delta_{m',m} \tag{4.9}$$

dove $\langle a', j\|T_1 \bullet T_2\|a, j\rangle = \langle a', j\|\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^*(0)\|a, j\rangle$.

Dimostrazione. Applicando il teorema (4.1) e utilizzando la relazione (3.13),

$$\langle a', j', m'|\,\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2\,|a, j, m\rangle = \frac{\langle a', j'\|\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^*(0)\|a, j\rangle}{(2j+1)^{1/2}}\,\langle j', m'|j, 0, m, 0\rangle \tag{4.10}$$

Per le regole di selezione (1.70) e (1.73) e l'identità $\langle j, m|j, 0, m, 0\rangle = 1$ si deduce che $\langle j', m'|j, 0, m, 0\rangle = \delta_{j',j}\delta_{m',m}$. Da cui discende la relazione (4.9) ■

Per le relazioni (3.35) e (3.36), è possibile generalizzare al caso tensoriale anche l'operatore momento angolare $\widehat{\boldsymbol{j}}$, il quale è un operatore vettoriale:

$$\widehat{j}(1,0) = i\widehat{j}_0 \tag{4.11}$$

$$\widehat{j}(1,\pm 1) = \frac{\mp 1}{2^{1/2}}\widehat{j}_{\pm 1} \tag{4.12}$$

Introducendo a questo punto gli operatori tensoriali di $\widehat{S}_k(k,q)$ con $k = 0, 1, ...$ così definiti

$$\widehat{S}_0(0,0) = \widehat{1} \tag{4.13}$$

$$\widehat{S}_k(k,q) = \frac{1}{2}(\widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1}(k,q) + \widehat{S}_{k-1} \otimes \widehat{j}(k,q)) \tag{4.14}$$

e indicando con $|a, j, m\rangle$ la base ortonormale comune agli operatori $\widehat{j}^2$ e $\widehat{j}_0$, i cui elementi sono distinti dal numero quantico a, per ogni operatore tensoriale irriducibile $\widehat{T}(k,q)$ vale il *teorema della proiezione*:

$$\langle a, j, m'|\, \widehat{T}(k,q)\, |a, j, m\rangle = \frac{\langle a, j \| T \bullet S_k \| a, j\rangle}{\langle a, j \| S_k \bullet S_k \| a, j\rangle} \langle a, j, m'|\, \widehat{S}_k(k,q)\, |a, j, m\rangle \tag{4.15}$$

dove gli elementi di matrice che compaiono nel membro di destra sono definite da (4.9).

Questo risulato permette di calcolare in modo semplice gli elementi di matrice degli operatori rotazionalmente covarianti rispetto ad una base ortonormale $|a, j, m\rangle$ di autoket comuni per gli operatori $\widehat{j}^2$ e $\widehat{j}_0$. Siano $\widehat{A}$, $\widehat{\boldsymbol{V}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ un operatore scalare, vettoriale e diadico simmetrico a traccia nulla rispettivamente, allora valgono le relazioni

$$\langle a, j, m'|\, \widehat{A}\, |a, j, m\rangle = \langle a, j, m_0|\, \widehat{A}\, |a, j, m_0\rangle\, \delta_{m',m} \tag{4.16}$$

$$\langle a, j, m'|\, \widehat{\boldsymbol{V}}\, |a, j, m\rangle = \frac{\langle a, j, m_0|\, \widehat{\boldsymbol{V}} \cdot \widehat{\boldsymbol{j}}\, |a, j, m_0\rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle a, j, m'|\, \widehat{\boldsymbol{j}}\, |a, j, m\rangle \tag{4.17}$$

$$\langle a, j, m'|\, \widehat{\boldsymbol{Q}}\, |a, j, m\rangle = \frac{3}{2} \frac{\langle a, j, m_0|\, \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot\cdot \widehat{\boldsymbol{j}}\widehat{\boldsymbol{j}}\, |a, j, m_0\rangle}{\hbar^4 j(j+1)(j(j+1) - 3/4)} \langle a, j, m'|\, \widehat{\boldsymbol{j}} \circ \widehat{\boldsymbol{j}}\, |a, j, m\rangle \tag{4.18}$$

dove m_0 è un generico valore tra quelli permessi per il numero quantico m.

Bibliografia

[1] R. Zucchini. *Quantum mechanics: lecture notes.* Università di Bologna, AA. 2016/2017.

[2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe (1977). *Quantum mechanics. Volume 1, 2.* Wiley-Interscience, New York.

[3] P. A. M. Dirac (1959). *I principi della meccanica quantistica.* Boringhieri, Torino.

[4] A. R. Edmonds (1974). *Angular momentum in quantum mechanics.* Princeton University Press, Princeton.

[5] E. U. Condon, G. H. Shortley (1953). *The theory of atomic spectra.* Cambridge University Press, Cambridge.